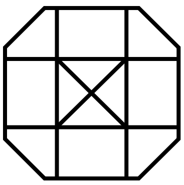
RESPOSTAS DAS PROVAS DA 3 FASE DE 2008.

NIVEL I

PROBLEMA 1



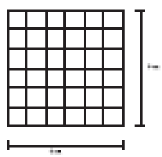
Divida o octógono em retângulos iguais e triângulos iguais como indicado na figura ao lado.
Perceba que a área pintada possui 2 dos 8 triângulos e possui também 1 dos 4 retângulos.
Assim, a área pintada representa 1/4 ou 25% da área total do octógono.

PROBLEMA 2

A) Notemos que a figura possui quatro lados medindo $3cm$ cada, quatro medindo $1cm$ cada e três medindo $2cm$ cada. Como o perímetro é a soma da medida dos lados, temos que

$$\text{Perímetro} = 4\times(3cm)+4\times(1cm)+3\times(2cm) = 12cm+4cm+8cm = 24cm.$$

B) Conforme a figura serão necessários 8 (oito) retângulos de $3cm$ de comprimento por $1cm$ de largura para obtermos um quadrado.



C) Como o quadrado é uma figura que têm a altura e a largura com medidas iguais, temos que a área será obtida multiplicando-se essas duas dimensões, ou seja, área $= (6cm) \times (6cm) = 36cm^2$.

PROBLEMA 3

Como Carlos começou com R$36,00 e sua quantia foi duplicada nas duas primeiras vezes, suas quantias, ao longo das transações, foram, sucessivamente: 36,00; 72,00; 144,00 e 36,00 reais. Isto significa que, ao passar da terceira para a última etapa, ele distribuiu aos outros amigos 108,00 e isto foi exatamente o bastante para duplicar as quantias de Antonio e Bernardo. Portanto, 108,00 era a soma do que possuíam Antonio e Bernardo na terceira etapa. Assim, eles possuem, no total: 144,00 + 108,00 = 252,00 reais.

PROBLEMA 4

O trabalhador que limpa o terreno todo em 4 horas é duas vezes mais rápido que o trabalhador que limpa o mesmo terreno em 8 horas. Assim, em um mesmo intervalo de tempo, aquele trabalhador limpa o dobro do terreno que este último trabalhador. Portanto, o trabalhador mais rápido limpa $\frac{2}{3}$ do terreno enquanto que o outro limpa $\frac{1}{3}$ do mesmo terreno para a tarefa estar terminada. Assim, o tempo gasto é

$$\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3} \text{ de hora.}$$

Como 1 h = 60 min e $\frac{1}{3}$ h = 20 min, então $\frac{8}{3}$ h $= 8 \cdot 20 = 160$ min = 120 min + 40 min = 2 h e 40 min.

PROBLEMA 5

$120 \times \frac{7}{10} = 84$ andam na roda gigante $\Rightarrow 120 - 84 =$ 36 não andam na roda gigante.

$120 \times \frac{3}{4} = 90$ andam no toboгã $\Rightarrow 120 - 90 =$ 30 não andam no tobogã.

$120 \times \frac{4}{5} = 96$ vão à montanha russa $\Rightarrow 120 - 96 =$ 24 não vão à montanha russa.

$120 \times \frac{17}{20} = 102$ viajam no trem fantasma $\Rightarrow 120 - 102 =$ 18 não viajam no trem fantasma.

A situação extrema é aquela em que as crianças que não andaram em um determinado brinquedo andaram nos outros três. Ou seja, é a situação em que qualquer criança andou em pelo menos três brinquedos. Neste caso, não andaram em um brinquedo:

$$36 + 30 + 24 + 18 = 108 \text{ crianças}$$

Restam portanto, $120 - 108 =$ 12 crianças (no mínimo) que teriam andado em todos os brinquedos.

PROBLEMA 6

Se no primeiro negócio houve lucro de 10%, então o valor do lote de ações era 270 000 reais, pois se x é o valor do lote de ações então

$$x \times 1,1 = 297000 \Rightarrow x = 270000$$

Portanto, o lucro foi de

$$297000 - 270000 = 27000$$

No segundo negócio, como houve um prejuízo de 10%, o valor do lote naquele dia 330 000 reais Assim o prejuízo foi $330000 - 297000 = 33000$. Computando-se os dois negócios, houve um prejuízo de $33000 - 27000 = 6000$.

NIVEL II

PROBLEMA 1

A) A área da reserva florestal é de 2 hectares. O resultado foi obtido da seguinte maneira:

i)somei os dados da metade do retângulo que fornece a medida de todas as áreas, $4 + 12 + 7 = 23$ hectares;

ii) somei os dados referentes a outra metade, $6+5+10 = 21$ hectares.

Como as medidas de i) e ii) deveriam ter dado o mesmo resultado, temos que a área da reserva florestal $= 23ha - 21ha = 2ha$.

B) O Saci gastou com sua área de 6 hectares o total de $R\$1320,00$. O resultado foi obtido da seguinte maneira:

i) Somar o total de hectares do Quindim e da Cuca, ou seja, $4ha + 7ha = 11ha$;

ii) Dividir o total que os dois pagaram pelo valor obtido no item i), ou seja, R\$$2420,00 \div 11 =$ R\$$220,00$;

iii) Multiplicando o valor obtido no final do item ii) pela área do Saci temos R\$$220,00 \times 6ha =$R\$$1320,00$.

PROBLEMA 2

$$a^2 - b^2 = 37 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 37$$

Como 37 é primo, temos a única possibilidade:

$$\begin{cases} a + b = 37 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$2a = 38 \Rightarrow a = 19 \Rightarrow b = 18$$

Logo os números são 19 e 18.

PROBLEMA 3

Se Ari e Bia não possuíssem moedas, eles deveriam ter quantias inteiras de dinheiro. Mas o dobro de um número inteiro, somado ao quádruplo de outro inteiro resultaria em um número par, o que não é o caso de 133. Em outras palavras, se $2a + 4b = 133$ então $a + 2b = 66,5$. Assim as quantias de dinheiro com Ari (a) e Bia (b) não podem ser ambas inteiras e então eles têm alguma moeda.

PROBLEMA 4

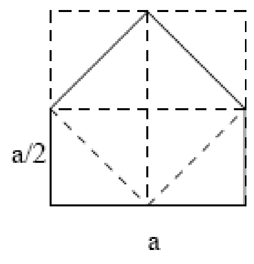
Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo.

PROBLEMA 5

O pintor que pinta a parede quadrada em 4 horas é duas vezes mais rápido do que o pintor que pinta a mesma parede em 8 horas. Assim, em um mesmo intervalo de tempo, aquele pintor pinta o dobro da parede do que este último pintor.

Portanto o pintor mais rápido pinta $\frac{2}{3}$ da parede externa enquanto que o outro pinta $\frac{1}{3}$ da mesma parede para que esta tarefa esteja terminada.

Agora podemos subdividir a parede externa em 6 triângulos iguais.



Então, o pintor mais rápido pintará 4 destes triângulos $\left(\frac{2}{3}\text{ do total}\right)$ e o outro pintará 2 destes triângulos.

Mas 4 triângulos corresponde à metade da parede quadrada. Portanto o trabalhador rápido demorará $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ horas para fazer a sua parte, que é o mesmo tempo do outro pintor $\left(\frac{1}{4} \cdot 8 = 2\right)$.

PROBLEMA 6

Comprando cada boi por R$ 250,00, o fazendeiro teve um custo total de R$ 250000,00. Para ter um lucro total de 40%, deverá arrecadar na venda dos 1000 bois o total de:

250000,00 x 1,4 = 350000,00

Na venda dos primeiros 400 arrecadou:

400 x 250,00 x 1,25 = 125000,00

Assim, na venda dos outros 600 bois deverá arrecadar:

350000,00 - 125000,00 = 225000,00

Cada boi deve ser vendido por:

225000,00 : 600 = 375,00

Logo, o fazendeiro deverá vender cada boi por R$ 375,00.

NIVEL III

PROBLEMA 1

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo.

PROBLEMA 2

Temos que a área de $\triangle BDC = \frac{DC.BC}{2} = \frac{1}{2}$. Sendo $BA \parallel CD$ e de mesma medida então $ABDC$ é um paralelogramo e então F é ponto médio de BC e FC mede $1/2$. Como os triângulos BDF e DFC têm dois lados congruentes e ângulos que são suplementares adjacentes, suas áreas são iguais e portanto $A_{DFC} = 1/2 \times A_{BDC} = 1/4$. O ponto G é baricentro já que é o encontro das medianas EF e DC do triângulo ADE e então $GC = DC/3 = 1/3$. A área do triângulo FCG é $(1/2 \times 1/3)/2 = 1/12$. A área do triângulo FGD é a diferença das áreas de $\triangle DFC$ e $\triangle FCG$. Temos $1/4 - 1/12 = 1/6$. A área do $\triangle FDC$ é $1/6$.

PROBLEMA 3

$$a^3 + b^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^3 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^3 = 1 + 1 = 2$$

PROBLEMA 4

Na primeira transferência, metade da quantidade inicial de água do vaso A vai para o vaso B e metade fica no vaso A. Após a segunda transferência (feita pela segunda pessoa), metade da metade que ficou no vaso A (ou seja, um quarto) vai para o vaso C e um quarto fica no vaso A.

Chamemos essas duas transferências de uma operação de transferência. Assim, após uma operação de transferência, o vaso C fica com a metade da quantidade de água que fica no vaso B:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

Como o processo é repetitivo, na segunda operação de transferência, metade da quantidade de água que estava no vaso A vai para o B, e um quarto da outra quantidade vai para C:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \\ \dfrac{1}{16} & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16} \end{array}$$

Assim, novamente, a quantidade de água no vaso C é a metade da quantidade de água no vaso B.

Prosseguindo, indefinidamente, até a água do vaso A se esgotar, teremos que a quantidade de água no vaso B será o dobro da quantidade no vaso C, ou seja, B conterá $\dfrac{2}{3}$ do total de água e C conterá $\dfrac{1}{3}$ do total.

PROBLEMA 5

Solução. Se c é o preço de cada coelho, p, o preço de cada pássaro, k, o preço de cada cachorro e x, a quantia paga por Murilo, temos que

$$\begin{aligned} 3c + 7p + 1k &= 172 \\ 4c + 10p + 1k &= 200 \\ 1c + 1p + 1k &= x \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por 3, a segunda por -2, e subtraindo uma da outra, obtemos

$$\begin{array}{r} 9c + 21p + 3k = 516 \\ -8c - 20p - 2k = 400 \\ \hline 1c + 1p + 1k = 116 \end{array}$$

Assim, a quantia paga por Murilo foi R$ 116,00.

PROBLEMA 6

Solução. a) Como o ângulo de 32^o é oposto pelo vértice ao complementar do ângulo de 48^o a soma dos dois deveria ser 90^o e não 80^o.

b) Os lados 2, 5 e 8 não formam um triângulo, pois $5 + 2 < 8$.

c) Os triângulos que formam o quadrilátero são congruentes, pelo caso LAL. Logo, os ângulos de 55^o e 75^o deveriam ser congruentes.

d) Os triângulos ABC, ABD e ACD são isósceles, daí, os ângulos de suas bases são iguais a α. Em D temos $\alpha + \alpha = 180^o$, isto é, $\alpha = 90^o$. Assim, os lados AB e AD são paralelos. Portanto, não existe o ponto A.