GABARITO DA 2 FASE
OLIMPIADAS DE MATEMATICA 2008

Nível I

Problema 1

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Problema 2

Sendo x o tempo que o lobo dorme por dia, temos que o 7x é tempo que a coruja dorme por dia.

Sabendo-se que enquanto um animal dorme o outro está acordado, x + 7x = 24.

Desse modo, concluímos que x = 3h e 7x = 21.

Ou seja, o lobo dorme 3h por dia e a coruja dorme 21h por dia.

Problema 3

Solução. A primeira pergunta a ser feita é quanto mede o lado do triângulo equilátero em destaque nas duas últimas figuras. Olhando para a terceira figura, onde o triângulo central aparece pela primeira vez, sabendo que as linhas de dobra dividem o lado do triângulo original em medidas 5, 2 e 5, podemos concluir que a medida procurada é exatamente 3 (veja a linha horizontal da terceira figura: ela ficou dividida em 2, 3 e 2 e a parte correspondente à medida 3 é exatamente o lado do triângulo central). A próxima pergunta a ser respondida é quantos triângulos equiláteros de lado 3 cabem num triângulo equilátero de lado 12. É uma simples contagem que pode ser feita usando um desenho como o abaixo, onde o triângulo maior tem lado 12 e os menores têm lado 3.

De modo que a resposta é: cabem 16 triângulos de lado 3 dentro do de lado 12. Logo a fração procurada é $\frac{1}{16}$.

Problema 4

Sejam: AG = altas e gordas; AM = altas e magras; BG = baixas e gordas; BM = baixas e magras.

Pelos dados do enunciado: AG = 5; BG + BM = 11; AG + BG = 13.

Assim: $5 + BG = 13 \Rightarrow BG = 8 \Rightarrow 8 + BM = 11 \Rightarrow BM = 3$.

$\therefore AG + AM + BG + BM = 30 \Rightarrow 5 + AM + 8 + 3 = 30 \Rightarrow AM=14$.

Problema 5

Notemos que o primeiro ano em que os clubes foram festejados foi 1917. Como mdc (7, 5) = 35, então depois de 1917 os clubes foram festejados simultaneamente de 35 em 35 anos. Assim, os anos requeridos são: 1917, 1952 e 1987.

Problema 6

O livro de Matemática custa R$ 25, 00.

O livro de Lógica custa 3/5 desse valor, ou seja, 3/5 de 25 reais = 15 reais.

O livro de Astronomia custa R$ 48, 00 – (R$ 25, 00 + R$ 15, 00) = R$ 8,00.

Um Cd custa 13/4 do livro de Astronomia, isto é,custa 13/4 de 8 reais = 26 reais.

Dessa forma, para sabermos quanto custa o outro CD, fazemos:

R$ 48,00 – R$ 26,00 = R$ 22,00.

Problema 7

10.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60+30+20+15+12+10}{120}.$$

Sendo $60 + 30 + 20 + 10 = 120$, basta excluirmos 15 e 12 da soma, ou seja, excluiremos as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$ para que o resultado seja $\frac{120}{120} = 1$.

Problema 8

Para encher o tanque de combustível de meu Pálio Adventure Flex Power são necessários 51 litros de combustível. Atento aos preços cobrados nos postos de gasolina, percebi que minha economia seria enorme se abastecesse em Madureira ao invés de Jacarepaguá. Semanalmente, encho 70 % da capacidade de meu tanque com álcool e o restante, coloco de gasolina. Faço isso 4 vezes por mês. No posto de Jacarepaguá, o litro da gasolina é R$2,499 e o do álcool é R$ 1,549. Já em Madureira, encontro o álcool a R$ 1,199, o litro, e a gasolina, a R$ 2,399, o litro. Determine qual é minha economia ao fim do mês escolhendo o posto de Madureira. (Mostre como chegou à resposta!)

Meu tanque tem capacidade para 51 litros. Dessa capacidade, abasteço com 35,7 litros de álcool (70%) e 15,3 litros de gasolina(30%).

Em Jacarepaguá, pago R$ 55,2993 pelo álcool e R$ 38,2347 pela gasolina. Gastando um total de R$ 93,534 por semana e R$ 374,136 por mês.

Em Madureira, pago R$ 42,8043 pelo álcool e R$ 36,7047 pela gasolina. Gastando um total de R$ 79,509 por semana e R$ 318,036 por mês.

Logo, minha economia é de R$ 56,10 abastecendo meu Pálio Adventure Flex Power em Madureira.

(Obs. A resposta R$ 56,12 também será aceita!!!)

Problema 9

O terreno de Ângela Poo Eira tem 23 m x 65 m = 1495 m^2.

Chamando a área destinada a Ari de R e a área destinada a Jupira de J, temos que J = R – 69.

Resolvendo a equação R + R – 69 = 1495, obtemos R = 782 m^2.

Se a largura AD permanece constante e vale 23m, chamamos de x a distância entre A e E.

23 x = 782 que nos leva a x = 34.

Portanto, a distância entre A e E é de **34 metros**.

PROBLEMA 10

QUESTÃO 4. A caminhonete do Tio Barnabé pode carregar até 2000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

A) Você acha possível que o Tio Barnabé faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?

B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

A) Não, porque 150 sacas de arroz de 60 quilos e 100 sacas de milho de 25 quilos totalizariam $11500 = 150 \times 60 + 100 \times 25$ quilos, que divididos por 5 dará $2300 = 11500 \div 5$ quilos para cada viagem e assim, tio Barnabé terá que fazer 6 viagens.

B) Se para cada viagem ele levar 25 sacas de arroz e 16 de milho, restarão 4 sacas de milho. Assim, ele deverá levar em cada uma das cinco viagens 25 sacas de arroz e 16 de milho e na 6^a viagem 25 sacas de arroz e 20 sacas de milho.

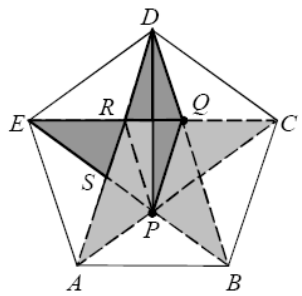
Nível II

Problema 1

a) **R.** $21{,}3\ cm \times 31{,}95\ cm$

b) **R. Reduziu-se a cerca da metade do era.**

Problema 2



Como o pentágono e a estrela são regulares, o quadrilátero *APQD* é um trapézio.
A área do trapézio *APQD* é igual à área do triângulo *APD* somada à do triângulo *PQD*. Como *BDRP* também é um trapézio, $\overline{RP} // QD$, então a área de *PQD* é igual à de *RQD*. Como a estrela é regular, a área de *RQD* é igual à de *ERS*, então, a área de *PQD* é igual à de *ERS*. Assim a área do trapézio *APQD* é igual à soma das áreas dos triângulos *APD* e *ERS*, que é igual à figura *APDRES,* que é exatamente metade da estrela toda.

Resposta: A área de *APQD* é 0,5.

Problema 3

O terreno de Ängela Poo Eira tem 23 m x 65 m = 1495 m^2.

Chamando a área destinada a Ari de R e a área destinada a Jupira de J, temos que J = R – 69.

Resolvendo a equação R + R – 69 = 1495, obtemos R = 782 m^2.

Se a largura AD permanece constante e vale 23m, chamamos de x a distância entre A e E.

23 x = 782 que nos leva a x = 34.

Portanto, a distância entre A e E é de **34 metros**.

Problema 4

Seja x o numero de alunos da classe. $\dfrac{720}{x}$ é a contribuição de cada aluno da classe.

$\dfrac{720}{x+5}$ é a nova contribuição de cada aluno.

Então:

$\frac{720}{x} = \frac{720}{x+5} + 2 \Rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 40$ e $x_2 = -45$ (não serve!)

Portanto, havia 40 alunos na classe.

Problema 5

Sejam a e b as raízes (inteiras) da equação $x^2 - Px + P = 0$, então

$$\begin{cases} a+b=P \\ a\cdot b = P \end{cases} \Rightarrow a\cdot b = a+b \Rightarrow a\cdot b - a - b = 0 \Rightarrow a\cdot b - a - b + 1 = 1$$

$\Rightarrow a(b-1)-(b-1) = 1 \Rightarrow (b-1)(a-1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ a-1=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} b-1=-1 \\ a-1=-1 \end{cases}$, então $a=2$ e $b=2$, ou $a=0$ e $b=0$.

Portanto, os valores de P são : 4 e 0.

Problema 6

Seja n o número original, ou seja n = [ab] = 10a + b. Note que [ab3] = 100a + 10b + 3 = 10(10a + b) + 3 = 10n + 3

Portanto: [ab3] = [ab] + 777 ⇒ 10n + 3 = n + 777 ⇒ 9n = 774 ⇒ n = 86

Problema 7

2	**5**	**7**
8	**1**	**6**
4	**9**	**3**

Problema 8

Solução. Os comprimentos possíveis são, em centímetros: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e 1024. Nélson deve sempre usar o maior pedaço possível, portanto é natural que comece pelo maior, 1024 cm. Não pode usar outro de mesmo tamanho, pois 1024 + 1024 é maior que 2007, então o segundo pedaço de barbante mede 512. A distância já coberta é $1024 + 512 = 1536$. O próximo pedaço não pode ser de 512, caso contrário a soma ultrapassaria 2007. Então deve ser de 256 e a distância já coberta é agora $1536 + 256 = 1792$. Repetindo o raciocínio, o próximo pedaço de barbante mede 128 e a distância já coberta é $1792 + 128 = 1920$. O próximo pedaço mede 64 e a distância já coberta é $1920 + 64 = 1984$. O próximo pedaço não pode medir 32, pois $1984 + 32 = 2016$, que ultrapassa 2007. O próximo pedaço mede portanto 16 e a distância já coberta é $1984 + 16 = 2000$. O próximo pedaço não pode medir 8, logo deve medir 4. E, finalmente, os dois últimos medem 2 e 1, totalizando 2007 cm. Conclusão: Nélson teve de usar no mínimo 9 pedaços de barbante.

Problema 9

Aplicando uma tabela de dupla entrada teremos:

	Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**	**Total**
Rapazes	10	**2**	0	12
Moças	**9**	11	**2**	**22**
Total	**19**	**13**	2	34

Logo 13 alunos fizeram aprova do N2.

Problema 10

Temos que pela equação fundamental da subtração (1) x-y=z. Também é dado que (2) x+y+z=128 e que (3) z=3y.

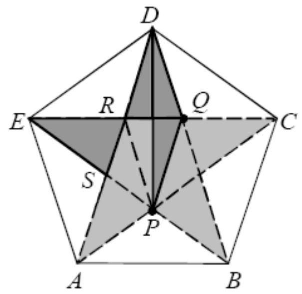
Substituindo (3) em (1) teremos que: x= 4y e aplicando em (2) obtemos que: 8y=128 ou y=16

Logo: x= 4.16=64 e z=3.16=48, ou seja, x.y.z=64.16.48=49.152.

Nível III

Problema 1
R. 106

Problema 2

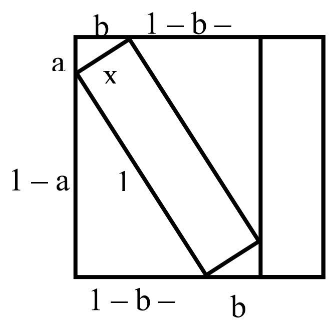


Como o pentágono e a estrela são regulares, o quadrilátero *APQD* é um trapézio.
A área do trapézio *APQD* é igual à área do triângulo *APD* somada à do triângulo *PQD*. Como *BDRP* também é um trapézio, $\overline{RP} // QD$, então a área de *PQD* é igual à de *RQD*. Como a estrela é regular, a área de *RQD* é igual à de *ERS*, então, a área de *PQD* é igual à de *ERS*. Assim a área do trapézio *APQD* é igual à soma das áreas dos triângulos *APD* e *ERS*, que é igual à figura *APDRES,* que é exatamente metade da estrela toda.

Resposta: A área de *APQD* é 0,5.

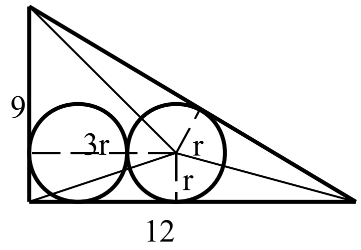
Problema 3
Sejam: A = americanas; E = espanholas; O = ouro; P = prata; C = cobre; CE = cobre espanholas.
Evidentemente: $A + E = 588$ $\quad O + P + C = 588$.
Como $O + P = 3C/4 \Rightarrow 3C/4 + C = 588 \Rightarrow 7C/4 = 588 \Rightarrow \underline{C = 336}$.
$CE = 4C/7 = 4(336)/7 \Rightarrow CE = 192$.
Como entre as moedas de cobre e moedas americanas tem-se 360 $\Rightarrow A + CE = 360 \Rightarrow$
$A + 192 = 360 \Rightarrow A = 168$.
$\therefore A + E = 588 \Rightarrow 168 + E = 588 \Rightarrow E = 420 \qquad \therefore E = O + C \Rightarrow 420 = O + 336$
$\Rightarrow \underline{O = 84}$.

Problema 4



Pela semelhança de triângulos:
$\frac{a}{1-b-x} = \frac{b}{1-a} = \frac{x}{1} \Rightarrow b = x(1-a)$ e $1 - b - x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 + bx = x - a$
Pelo Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = x^2 \Rightarrow a^2 + x^2(1 - 2a + a^2) = x^2 \Rightarrow$
$a^2 + x^2 - x^2(2a - a^2) = x^2 \Rightarrow a = x^2(2 - a) \Rightarrow a = x^2 + x^2(1 - a) \Rightarrow a = x^2 + bx \Rightarrow$
$a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = x^2\left(2 - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x(4 - x) = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$
$x = 2 - \sqrt{3}$

Problema 5



Pelo Teorema de Pitágoras a hipotenusa do triângulo vale $\sqrt{9^2+12^2}=15$.

Divida o triângulo retângulo em 3 triângulos menores, unindo o centro da circunferência tangente à hipotenusa aos vértices do triângulo. A área do triângulo retângulo pode ser calculada de duas maneiras:

$\frac{9.12}{2}=\frac{9.3r}{2}+\frac{12.r}{2}+\frac{15.r}{2}$ $\Rightarrow$ r = 2

Problema 6

Suponhamos que x, y e z são os preços das pedras nas 1^a, 2^a e 3^a caixas, respectivamente.
Portanto temos que:
28.x = 42.y = 75.z = valor pago total.
Para comprar a quantidade desejada: 1967 = 1.x + 3.y + 2.z $\Rightarrow$

$1967=\frac{42.y}{28}+3.y+\frac{2.42.y}{50}=\frac{281.y}{50}$ $\Rightarrow$ y = R$ 350,00

Problema 7

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo.

Problema 8

Nas últimas eleições para prefeito da cidade de Tribobó do Norte, que possui 36000 habitantes, $\frac{1}{20}$ desses eleitores deixaram de votar. Entre os votantes, $\frac{1}{12}$ votou em branco, $\frac{1}{20}$ anulou o voto e $\frac{3}{5}$ votaram em Severino Sombra, o vencedor da eleição. Sabendo-se que apenas dois candidatos disputaram a eleição, determine a diferença de votos entre Severino Sombra e o candidato derrotado.

Total : 36000 eleitores

Não votaram: $\frac{1}{20}$. 36000 = 1800 eleitores

Votaram: 36000 – 1800 = 34200 eleitores

Branco: $\frac{1}{12}$. 34200= 2850 eleitores

Nulo: $\frac{1}{20}$. 34200 = 1710 eleitores

Severino Sombra: $\frac{3}{5}$. 34200= 20520 eleitores

Candidato derrotado: 34200- (2850+1710+20520) = 9120 eleitores

De acordo com os valores acima, a diferença entre Severino Sombra e o candidato derrotado foi de **11400 votos**.

Problema 9

i) Mostre que a área de um um triângulo equilátero é dada por $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$, onde ℓ é o lado do triângulo.

ii) É possível construir um triângulo equilátero de área $A = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2$ e contido na região delimitada por um círculo de raio 1? Justifique.

iii) É possível construir um triângulo equilátero com área de $A = 2\sqrt{3} - 3$ e contido na região delimitada por um quadrado de lado 1? Justifique.

iv) É possível construir uma curva poligonal fechada formada de 4 segmentos retilíneos justapostos com comprimentos $\ell_i > 0$, contida na região delimitada por um círculo de raio 1, e que possua comprimento total $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4$ maior que 2π? Justifique.

i) Temos sen $60° = \frac{h}{\ell}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\ell}$, portanto, $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

$A = \frac{b \cdot h}{2}$ implica $A = \frac{\ell\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}$ e portanto $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

ii) A área do círculo é $A_C = \pi r^2$ e para $r = 1$ tem-se que $A_C = \pi$. Assim não é possível construir um triângulo equilátero como pede o problema, pois $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2$ (área do triângulo) $> \pi$ (área do círculo).

iii) Temos

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} - 3 = \frac{8\sqrt{3} - 12}{4}$$

logo

$$\ell^2 = \frac{8\sqrt{3} - 12}{\sqrt{3}} = \frac{24 - 12\sqrt{3}}{3} = 8 - 4\sqrt{3}.$$

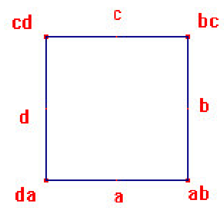
Portanto $\ell = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ e com esta medida é possível construir um triângulo como pedido, por exemplo, construa um triângulo com um vértice coincidindo com um vértice do quadrado e simétrico em relação a diagonal do quadrado contendo este vértice.

iv) $L = 2\pi r$. Sim, se um deles passar pelo diâmetro e os outros 3 muito rentes ao primeiro, a soma excederá o comprimento do círculo de raio $r = 1$, que é $C = 2\pi$.

Problema 10

Severina escreveu um número inteiro positivo em cada lado de um quadrado. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nos lados que se encontram nesse vértice. A soma dos números escritos em dois lados opostos é 60 e a soma dos números escritos nos outros lados é 85. Qual é a soma dos números escritos nos vértices?

1ª solução: Sejam a, b, c e d os números escritos nos lados do quadrado, como na figura. Os números associados aos vértices são, portanto, ab, bc, cd e da, e sua soma é



$$\begin{aligned} ab + bc + cd + da &= b(a+c) + d(a+c) \\ &= (a+c)(b+d) \\ &= 85 \times 60 = 5100 \end{aligned}$$

2ª solução: Sejam a e b dois lados adjacentes do quadrado e $60 - a$ e $85 - b$ os outros dois. Então a soma dos produtos dos comprimentos de lados adjacentes é

$$ab + b(60 - a) + (60 - a)(85 - b) + (85 - b)a = 5100\,.$$