Universidade do Estado de Mato Grosso
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática

Contextualização de problemas de matemática utilizando literatura

André Luiz Mezz

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares**

Barra do Bugres - MT

31 de maio de 2021

Contextualização de problemas de matemática utilizando literatura

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por André Luiz Mezz e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Bugres, 31 de maio de 2021.

Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares
Prof. Dr. William Vieira Gonçalves
Profª. Dra. Giseli Martins de Souza
Prof. Dr. Luiz Fernando de Souza Freitas

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Walter Clayton de Oliveira CRB 1/2049

M617c

MEZZ, André Luiz.

Contextualização de Problemas de Matemática Utilizando Literatura / André Luiz Mezz – Barra do Bugres, 2021.

88 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

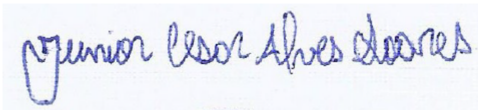
Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Mestrado Profissional em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Barra do Bugres, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.

Orientador: Junior Cesar Alves Soares

1. Contextualização de Problemas. 2. Lewis Carroll. 3. Malba Tahan. 4. Desafios. 5. Literatura. I. André Luiz Mezz. II. Contextualização de Problemas de Matemática Utilizando Literatura.

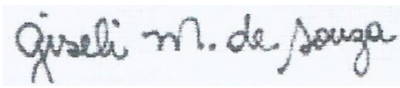
CDU 510.2

Dissertação de Mestrado defendida em 31 de maio de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

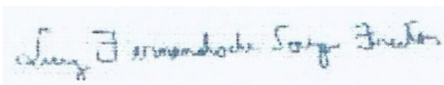


Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Prof. Dr. William Vieira Gonçalves



Profª. Dra. Giseli Martins de Souza



Prof. Dr. Luiz Fernando de Souza Freitas

Dedico a todos que contribuíram, de alguma maneira, para o meu sucesso.

Agradecimentos

Agradeço Primeiramente ao meu pai, Paulo Roberto Mezz, por todo apoio, cuidado, dedicação e por tudo que me proporcionou enquanto estava conosco. Sentimos sua falta!

Quero agradecer também a minha mãe Solange M. Costa, por toda dedicação e apoio que sempre teve.

Agradeço muito a minha namorada, Nádilei Alves Post, pelo companheirismo, comprometimento, por me ajudar, por sempre estar ao meu lado me dando apoio e força quando eu precisava, ainda mais nesses últimos anos que foram muito difíceis para nós.

Deixo meus agradecimentos para minha irmã, Roselaine Mezz, e meu cuinhado Alison de Freitas Silva, que foram muito presentes nessa etapa da minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Junior Cesar Alves Soares, pelo comprometimento, incentivo, disposição e auxílio na realização desse trabalho.

Agradeço a todos os professores que ministraram as disciplinas que concluí no PROFMAT. Todos foram muito importantes nessa caminhada.

Agradeço a todos os meus colegas de turma, Brunna Caroliny do Vale Doutor, Ivonildo Ferreira Martins Souto, Josimara Lima Furtado dos Santos, Marcio Norberto da Silva, Miriam de Lima Hellmann, Ronaldo Alves dos Santos, Wanderson Matos e Silva, Wanessa Hoffmann e Whatilan Fernandes Luciano, pelo companheirismo, pela parceria e por todos os mementos e vitórias que passamos juntos.

E por fim, agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente na minha formação acadêmica, contando ensino médio, graduação e mestrado.

Muito obrigado!

Aos que aqui chegaram,
vale lembrar:

"A única forma de se chegar ao impossível é acreditar que é possível"

Lewis Carroll.

Resumo

Neste trabalho é abordado uma relação entre a matemática e a literatura, dando foco na elaboração de problemas contextualizados. O intuito é apresentar uma metodologia de ensinar utilizando literaturas que abrangem conteúdos matemáticos, mesmo que discretamente. As literaturas em questão são: "Alice no País das Maravilhas", escrito por Lewis Carroll, pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson; "O Homem que Calculava", de Malba Tahan, pseudônimo de Júlio César de Mello e Souza; e obras afins como" Alice no País dos Enigmas" e "Matemática Divertida e Curiosa", fornecendo aos professores do Ensino Fundamental II, Médio e até Superior, uma visão diferenciada de contextualizar atividades ou criar desafios através das obras citadas.

Palavras chave: Contextualização de Problemas, Lewis Carroll, Malba Tahan, Desafios, Literatura.

Abstract

This work addresses a relationship between mathematics and literature, focusing on the elaboration of contextualized problems. The intention is to present a methodology of teaching using literatures that cover mathematical contents, even if discretely. The literature in question is “Alice in Wonderland,”written by Lewis Carroll, pseudonym of Charles Lutwidge Dodgson; “The Man Who Counted”, by Malba Tahan, pseudonym of Júlio César de Mello e Souza; and related works such as “Alice in Puzzle-Land”and “Funny and Curious Mathematics”, providing to the teachers of Elementary II, Highschool and even in higher education, a differentiated view of contextualizing activities or creating challenges through the works cited.

Keywords: Contextualization of Problems, Lewis Carroll, Malba Tahan, Challenges, Literature.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A motivação desta pesquisa iniciou-se no ensino Médio, no curso de Técnico em Agropecuária no IFMT – Campus Juína, onde o professor de matemática atribuiu para a turma de 1º ano, na qual eu estava inserido, um trabalho que consistia em ler, identificar e analisar passagens matemáticas na obra de Lewis Carroll, "Alice No País das Maravilhas".

Já na graduação que fora cursada na mesma instituição ao lembrar desse trabalho decidi iniciar uma pesquisa buscando identificar e analisar de maneira mais concisa essas passagens matemáticas em "Alice no País das Maravilhas", inicialmente, no intuito de escrever um artigo, tarefa que era incentivada pelos coordenadores do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência). Inclinado a continuar a pesquisa escolhi como tema de meu TCC intitulado: Lewis Carroll: Alice no País das Maravilhas, uma Análise da Aplicabilidade da Obra em Matemática.

O livro "As Aventuras de Alice no País das Maravilhas"relata fantasias lúdicas sobre a realidade e a linguagem. Escrito por Charles Lutwidge Dodgson, mais conhecido pelo pseudônimo de Lewis Carroll, este que nasceu em Daresbury, Cheshire, Inglaterra, estudou Licenciatura em Matemática na Universidade de Oxford, e lá lecionou matemática entre 1855 e 1888. Seus múltiplos interesses compreendiam o estudo de lógica e matemática. [7]

De modo a continuar minha pesquisa decidi estudar também a obra de Malba Tahan, "O Homem que Calculava", este que é pseudônimo Júlio Cesar de Mello e Souza, brasileiro, carioca, nascido em 6 de maio de 1895, foi professor, educador, pesquisador, arquiteto, engenheiro, escritor e editor. Formou-se professor pela Escola Normal e engenheiro pela Escola Nacional de Engenharia. Lecionou no Colégio Mello e Souza, o Colégio Pedro II, na Escola Normal e na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Publicou mais de 120 livros, dos quais 51 eram sobre matemática, sendo "O Homem que Calculava"seu sucesso de vendas. [30]

A escolha dessas duas obras, tão distintas, não partiu somente de interesse pessoal, veio na intenção de mostrar que podemos trabalhar matemática utilizando uma história onde ela está contextualizada de maneira mais evidenciada, como pode ser observado em "O Homem que Calculava", ou uma obra que apresenta a matemática nas entrelinhas, como em "Alice No País das Maravilhas", de modo a apresentar um método de auxílio da aprendizagem.

A matemática, muitas vezes, é vista pelos alunos como uma espécie de "bicho de sete cabeças", configurando assim, o conceito pré-formado de que a "matemática é muito difícil", visto, não somente pelos alunos, mas também por uma parcela da comunidade.

> Na vivência escolar deparamos com professores que relatam "a matemática precisa tornar-se fácil", dando a entender que ela é difícil. Estes identificam na voz do aluno como uma disciplina chata e misteriosa que assusta e causa pavor, e por consequência, o educando sente vergonha por não aprendê-la. Considerando pela nossa experiência de alguns momentos em sala de aula. [32]

Outra consequência é o desconforto de não aprender matemática, pois cria uma espécie de barreira emocional no estudante, que o impede de construir conhecimentos matemáticos.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) em 2018, revela que $68,1\%$ dos estudantes brasileiros não possuem nível básico de matemática, e, em leitura, são 50%, sendo que estes índices estão estagnados desde 2009 [22]. Visando esses baixos índices, proponho trabalhar matemática utilizando a literatura, sendo que o objetivo principal é apresentar ser possível e viável contextualizar atividades utilizando literaturas de divulgação de matemática[1] como método de facilitação da aprendizagem, mais especificamente, apresentar ser possível contextualizar a matemática utilizando as obras como: Alice No Pais das Maravilhas; O Homem que Calculava; Matemática Divertida e Curiosa, e Alice no País dos Enigmas 1 e 2.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos. O Capítulo 1 é apresentado uma breve fundamentação sobre a matemática relacionada a literatura e a contextualização na criação de questões problema.

No Capítulo 2 é feito a exposição de cinco trechos do livro Alice no País das Maravilhas que podem ser atrelados a algum conteúdo de matemática, fazendo, inicialmente, uma breve fundamentação teórica do conteúdo envolvido, e posteriormente a exposição e análise do trecho retirado do livro. Para o levantamento dos dados, foi consultado o livro Aventuras de Alice no País das Maravilhas & Através do Espelho, publicado pela editora

[1]Defimos literaturas de divulgação de matemática como obras literárias que a trazem em seu contexto.

ZAHAR em 2013, com tradução de Maria Luzia X. de A. Borges, introdução e notas de Martin Gardner, e também o livro “Alice no País das Maravilhas”, publicado pela editora Martin Claret em 2014, com tradução de Márcia Feriotti Meira. A ideia de utilizar de duas traduções é conveniente, pois cada tradutor tem a sua maneira de transcrever a obra, do inglês para o português, podendo haver alterações de algumas palavras ou sentidos.

No Capítulo 3 foi dividido em cinco subseções, cada uma contando com um trecho do livro “O Homem que Calculava”, onde são realizados comentários, análises e a fundamentação teórica do assunto envolvido, consultando a edição número 83, publicada em 2013 pela editora Record.

No Capítulo 4 são feitas algumas sugestões de atividades, utilizando, além das obras citadas nos capítulos 2 e 3, os Livros “Alice no País dos Enigmas”1 e 2 de R. W. Galland, publicados pela editora Ediouro em 2013 e 2014, respectivamente, contendo ao todo 120 jogos e desafios baseados nos personagens e na obra de Lewis Carroll, e o livro “Matemática Divertida e Curiosa”, de Malba Tahan, publicado pela editora Record em 2001.

Capítulo 1

Matemática, Literatura e a Contextualização de Problemas

Neste Capítulo apresentaremos uma breve fundamentação sobre trabalhos de matemática com auxílio da literatura, com o objetivo de facilitar a compreensão de alguns conteúdos de matemática para o aluno. Tratamos também das obras escolhidas para o estudo e de contextualização ou elaboração de questões problemas.

Com o passar dos anos e o desenvolvimento da forma de ensinar, em suas diversas metodologias, se tornou mais frequente o anseio dos professores em buscar novas alternativas pedagógicas para o ensino, dentre elas o uso de literatura de divulgação de matemática. Ela pode facilitar a aprendizagem dos alunos, pois falam de alguns conteúdos de matemática de maneira mais lúdica e menos formal. Destaca-se como obras utilizadas pelos professores os livros: "Alice no País das Maravilhas"de Lewis Carroll e "O Homem que Calculava"de Malba Tahan, pois são de fácil acesso[1] e de fácil leitura por parte dos alunos.

A matemática presente no livro de Carroll é encontrada ou observada de maneira indireta requerendo muita atenção e conhecimento do leitor para percebê-la. Carroll foi um grande matemático e utilizou em suas obras uma maneira bem curiosa de ensiná-la inserindo a matemática e a lógica de uma forma bem diferente não tão óbvia de enxergá-la dentro de suas obras [2]. "Os dois livros de Alice revelam o humor de um matemático que brinca com a lógica e faz alusões veladas a temas científicos. A maioria das vezes, as

[1] A obra O Homem que Calculava é facilmente encontrado na *internet* e Alice no País das Maravilhas é uma obra de domínio público.

alusões são indiretas, e muito se tem discutido sobre algumas passagens" [29].

Já no livro "O Homem que Calculava", "Malba Tahan expõe seu cuidado em transmitir ao leitor o máximo de informação possível, utilizando notas de rodapé, apêndices, citações e referências bibliográficas" [42], apresentando a matemática através do personagem Beremiz Samir, um exímio calculista e conhecedor dos números, que ao longo da história, em sua viagem a Bagdá, se depara com diversos problemas, alguns até então sem respostas, apresentando engenhosas resoluções, embasadas nas propriedades matemáticas, que encanta seus companheiros e ganha a admiração do rei.

Trabalhar matemática junto a literatura é uma alternativa viável e necessária para o ensino, quando enquadradas no contexto educacional de maneira correta.

> As relações entre a Literatura e a Matemática, se corretamente articuladas, podem ser compreendidas como possibilidades para vincular o contexto cultural e social às aulas, fazendo uma ponte entre o concreto e o abstrato, aspecto fundamental para contextualização de conteúdos matemáticos, podendo, inclusive, proporcionar ao estudante a capacidade de análise crítica sobre o mundo que o cerca, além de desenvolver a competência de argumentação, expressão e sistematização [21].

Dentre os variados benefícios de trabalhar matemática utilizando literaturas de divulgação, temos: as ideias matemáticas são ensinadas no contexto de uma história; combina estudos integrados com leitura, escrita, fala, audição, etc.; avanços do pensamento matemático; impede a ansiedade matemática e cria um ambiente de sala de aula menos ansioso a matemática; permite uma variedade de respostas; permite aplicações e conexões históricas, culturais e práticas; pode promover o uso de certas manipulações matemáticas relativas a história; o professor pode avaliar o entendimento da criança pela leitura/questionamento; presta-se a resolução de problemas e envolvimento ativo a partir do contexto da história [14].

Para trabalhar matemática utilizando de literaturas, o educador necessita de mente aberta e de muita ousadia, uma vez, que este educador, tem que saber lidar com relações interdisciplinares e estará sujeito a críticas [21]. Ao aplicar a literatura com a matemática, o professor deve estar ciente de tomar os seguintes cuidados:

> [...] conhecer a história antes de apresentá-la à classe e saber as possibilidades de trabalho que ela permite; explorar a Matemática durante a história, porém, sem romper-se sentido; conhecer o gosto dos estudantes em relação às histórias; e por fim, explorar o livro com calma e emoção, de maneira que crie expectativas. [21]

Além disso, o professor, ao utilizar de uma obra literária, deve conhecer seu autor, considerar suas motivações e perspectivas para a produção da obra [26].

Muitas vezes a matemática é ensinada distante da realidade de maneira árida e sem sentido, utilizando de uma linguagem técnica que, inicialmente, os alunos não estão acostumados

> [...] a escola está habituada a ensinar a matemática através da realização de exercícios repetitivos, e da memorização de fórmulas e teoremas, que nem sempre estabelecem uma relação com as situações da vida extraescolar. Desta forma, os alunos acabam apresentando dificuldades na interpretação de conceitos e enunciados de problemas devido à falta de significado da Matemática para eles. [42]

Não descarto totalmente as atividades no estilo "arme e efetue", "resolva ou calcule", elas são essenciais para o aluno aprender a utilizar as equações, mas estas não podem aparecer na maioria das vezes, pois assim se tornam repetitivas, massantes e sem sentido, fazendo que o aluno se pergunte "onde aplicarei isso? Por que estou apendendo isso?" entre outros questionamentos.

> Os professores de Matemática — salvo raras exceções — têm, em geral, acentuada tendência para o algebrismo árido e enfadonho. Em vez de problemas práticos, interessantes e simples, exigem sistematicamente de seus alunos verdadeiras charadas, cujo sentido o estudante não chega a penetrar. É bastante conhecida a frase do geômetra famoso que, depois de uma aula na Escola Politécnica, exclamou radiante: "Hoje, sim, estou satisfeito! Dei uma aula e ninguém entendeu!"
> O maior inimigo da Matemática é, sem dúvida, o algebrista — que outra coisa não faz senão semear no espírito dos jovens essa injustificada aversão ao estudo da ciência mais simples, mais bela e mais útil. Lucraria a cultura geral do povo se os estudantes, plagiando a célebre exigência de Platão, escrevessem nas portas de suas escolas: "Não nos venha lecionar quem for algebrista."
> Essa exigência, porém, não devia ser... platônica! [40]

Para contornar algumas das dificuldades dos alunos, sugiro que o professor incentive a leitura de obras que relatam ideias de conteúdos de matemática, a propósito, dentre as obras utilizadas para este fim destacam-se as seguintes: O Pequeno Príncipe; Aritmética de Emília; Dialogo Lúcido da LITERATURA e a MATEMÁTICA; Pra que serve o zero?; Curvo ou reto olhar secreto; As três partes e alguns poemas e poesias; Alice no País das Maravilhas e O Homem que Calculava [2, 33]. Com isto podemos perceber que:

> A Literatura pode sim ser usada como ferramenta para o ensino-aprendizagem de alguns conceitos matemáticos, pois, amplia a possibilidade de integração das diferentes dimensões do conhecimento, rompe com a monotonia, desperta a curiosidade, melhora a oralidade e a capacidade de argumentação e de estruturação do pensamento, e, sem dúvida aumenta enormemente a capacidade de interpretação das mais variadas situações, sejam elas matemáticas ou não. [33]

Podendo ter os seguintes *feedbaks*[2] dos alunos:

> [...] os que preferiam declaradamente a área de humanas mostraram-se muito satisfeitos de estarem lendo um livro na aula de matemática, já aqueles que gostavam de exatas, mas não gostavam de ler, mostraram-se mais interessados, pois segundo eles, pelo menos era um livro que falava de matemática". [34]

Em "Alice no País das Maravilhas", de Carroll, e no "Homem que Calculava", de Tahan, podemos encontrar diversos enigmas, charadas ou desafios que podem ser modelados e encarados como questões problema, fugindo das famosas atividades pseudo-contextualizadas, "onde uma certa pessoa tem mil laranjas".

> [...]nos anos 90, a resolução de problemas ganha uma outra dimensão sendo descrita como uma metodologia para o ensino de matemática e, como tal, passando a ser um conjunto de estratégias para o ensino e o desenvolvimento da aprendizagem de matemática. Essa concepção da resolução de problemas pode ser vista através de indicações de natureza puramente metodológicas, como usar um problema detonador ou desafio que possam desencadear o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, trabalhar com problemas abertos, usar a problematização ou formulação de problemas em projetos, etc. também está presente em orientações mais amplas para o ensino de matemáticas, que correspondem a linhas de pesquisa e de atuação da educação matemática, como é o caso da modelagem e do ensino por projetos. [35]

Observemos que a aplicação de questões problemas, modeladas a partir de situações reais ou fictícias (retiradas de livros, filmes, etc.), em sala de aula podem contribuir com o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, fazendo com que passem a sentir a matemática mais palatável. Como uma perspectiva metodológica

> [...] a resolução de problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, consequentemente, do que significa aprender. Daí a escolha do termo "perspectiva", cujo significado "uma certa forma de ver" ou "um ponto de vista" corresponde a ampliar a conceituação de resolução de problemas como simples metodologia ou conjuntos de orientações didáticas. [35]

[2]Palavra da língua inglesa, significa uma opinião ou um retorno.

Ressaltando também que,

> [...] a resolução de problemas é uma estratégia de ensino matemático que nos fornece ferramentas diferenciadas, ela propicia o abandono dos exercícios repetitivos e traz nossos alunos para uma matemática mais prática e com mais sentido permitindo assim, que os alunos sejam mais participativos em sala de aula. Cabe ao professor, durante o processo de resolução de um problema, fornecer oportunidades para que os alunos partilhem suas ideias quanto à estratégia e raciocínio de pensamentos matemáticos, dando-lhes a oportunidade de que eles mesmos verifiquem a praticidade dos conceitos matemáticos aprendidos.
> Por mais simples que um problema matemático seja, ele pode estimular o gosto pelo raciocínio logico, principalmente quando desafia a curiosidade e proporciona ao aluno a satisfação na descoberta da solução. [34]

A resolução de problemas bem contextualizados é posta como atividade importante em uma sala de aula, pois com a utilização deste método os alunos se interessam mais pelas aulas de matemática, fazendo com que estes, busquem aprender e desenvolver problemas de maneira prática, ou seja, com modelagem matemática, e colaborar com as aulas, no sentido auxiliar nas atividades propostas. Destacando também, que a resolução de problemas se baseia na proposição e no enfrentamento de situações-problema, visto que o resolvedor não encontrará soluções evidentes, tendo que combinar seus conhecimentos para chegar em um resultado.

Capítulo 2

A matemática presente no livro "Alice no País das Maravilhas"

Neste Capítulo será apresentado algumas aplicações de matemática na mais famosa obra de Lewis Carroll, Alice no País das maravilhas, fazendo inicialmente uma breve descrição do autor e das críticas sociais do período Vitoriano que podem ser encontradas no livro.

Charles Lutwidge Dodgson, mais conhecido pelo pseudônimo de Lewis Carroll, nasceu em Daresbury, Cheshire, Inglaterra, em 27 de janeiro de 1832. Estudou Licenciatura em Matemática na Universidade de Oxford e ali lecionou matemática entre 1855 e 1888. Seus múltiplos interesses compreendiam o estudo de lógica, matemática, poesia, narrativa ficcional e fotografia [7]. Faleceu em 14 de janeiro de 1898.

Figura 2.1: LEWIS CARROLL
Fonte: https://www.lewiscarroll.org

Carroll foi um grande romancista, poeta e matemático. Alice no País das Maravilhas, publicado em 1865, consistiu em uma de suas principais obras, que não era somente destinada ao público infantil, mas também ao adulto. Surgiu durante um passeio de barco, onde as três irmãs Liddell imploravam a Carroll que lhes contasse uma história [36]. A maioria das obras de Carroll estão descritas no Apêndice 1.

A história contém inúmeros jogos lógicos e matemáticos, mas também uma crítica social a respeito da insatisfação de Carroll com a educação das crianças no período Vitoriano. As crianças eram educadas em escolas particulares, *Public Schools* inglesas, ou recebiam lições em casa, por professores e governantes. As escolas particulares podiam ser pagas apenas por famílias muito ricas, parcela que correspondia a minoria da população [36]

> [...] as *Public Schools* inglesas diferiam profundamente daquelas estabelecidas na América, por exemplo. As escolas inglesas não eram sustentadas pelo Estado, com o objetivo de estender a educação a um grande número de alunos. Na verdade, o que ocorria era exatamente o oposto: estas instituições eram voltadas para filhos de 'gentlemen' e, portanto, seus custos anuais eram bastante altos, sendo ainda acrescidos de inúmeros 'extras' em cada pagamento. As principais disciplinas ensinadas nessas instituições eram escrita e leitura e os clássicos (latim e grego), e havia uma forte ênfase nas questões religiosas. [36]

As crianças eram educadas para serem "mini adultos", para que tivessem um comportamento de adultos, e isto era regido pelo medo da punição. Carroll mostra isso logo no início da história, onde Alice está na ribanceira ao lado de sua irmã, enfadada por não ter nada para fazer, ou seja, por não poder fazer nada, encontrava-se em um estado de tédio, que certamente estava sendo causado pela sociedade vitoriana opressora. Esse estado é quebrado quando ela avista o Coelho Branco, que desperta a sua curiosidade e a vontade de ir atrás de aventura [5]. Então

> A personagem Alice foge desse padrão infantil e do padrão de comportamento vitoriano. Ela se aventura, vai atrás da diversão, do diferente, do prazer que essa experiência poderia trazer para ela, sem pensar nas consequências ou na punição. Ela não é uma personagem infantil que segue e/ou prega um específico modelo – ela é, ao contrário, para os padrões vitorianos, ousada, porque não se preocupa com as consequências de seus atos. Ela subverte, portanto, o paradigma de comportamento esperado pela sociedade inglesa vitoriana das crianças e dos adultos, na medida em que as crianças eram vistas como "mini adultos". [5]

No Capítulo final, Alice volta a realidade, ficando ao lado da sua irmã novamente. Fugindo dos padrões impostos pela sociedade vitoriana, Alice vivencia um estado de ânimo pós-aventura, onde ela alcança o seu objetivo, que é diversão. A culpa e punição, assim como o medo estão ausentes da obra de Carroll. [5]

Carroll fez subversões a símbolos importantes da sociedade inglesa, sendo a principal delas a figura da Rainha. Quando Carroll publicou Alice no País das Maravilhas, quem estava no trono era a Rainha Vitória e o regime político daquela época (século XIX), era a monarquia parlamentarista, onde quem governa é o Ministro de Estado, ou primeiro-ministro e o parlamento.

A Rainha Vitória tinha poder político limitado, assim, como a Rainha de Copas, que quase não tem poder de decisão e suas ordens de decapitação nunca são cumpridas. Acerca disto cita-se três trechos do livro [5]:

> "E quem são esses?" quis saber a Rainha apontando os três jardineiros deitados em volta da roseira; pois, como estavam de bruços e tinham nas costas o mesmo padrão que o resto do baralho, ela não tinha como saber se eram jardineiros, soldados, cortezões ou três dos seus próprio filhos. "Como eu poderia saber?" disse Alice, surpresa com a própria coragem. "Isso não é da minha conta. " A Rainha ficou rubra de fúria, e depois de fuzilá-la com os olhos por um momento como uma fera selvagem gritou: "Cortem-lhe a cabeça! Cortem . . . " "Disparate!" disse Alice decidida, em alto e bom som, e a Rainha se calou. [6]

> O Grifo se sentou e esfregou os olhos; depois fitou a Rainha até que ela sumiu de vista; em seguida disse com um risinho satisfeito, meio para si mesmo, meio para Alice: "Que engraçado! " "Onde está a graça?" perguntou Alice. "Ora, nela", disse o Grifo. "É tudo fantasia dela: nunca executaram ninguém." [6]

> "Não, não!" disse a Rainha. "Primeiro a sentença. . . depois o veredito. " "Mas que absurdo!" Alice disse alto. "Que ideia, ter a sentença primeiro! " "Cale a boca!" disse a Rainha, virando um pimentão. "Não calo!" disse Alice. [6]

Para a Rainha de Copas, a solução de todos os problemas era a decapitação, porém, suas ordens nunca foram cumpridas, porque, apesar de ser considerada rainha, ela não possuia autoridade sobre os demais.

No primeiro e terceiro trecho, Alice enfrenta a Rainha e ao fazer isso, ela enfrenta também o sistema, pois, mesmo que sem autoridade, a rainha ainda é uma representação deste, assim, pondo em xeque o julgamento de seu poder. Porém, Alice não recebe nenhuma categoria de punição e em uma obra que critica a realidade, não ser punido por tais enfrentamentos a autoridade é o auge da libertação da rigidez e opressão. [5]

No contexto da história de Alice no País das Maravilhas podemos encontrar inúmeras passagens carregadas de lógica matemática e algumas destas passagens podem ser modeladas em questões problemas e trabalhadas com alunos, de modo a expor alguns conteúdos. Dando foco a conteúdos do Ensino Médio e Superior, será feito uma análise de alguns trechos no livro, onde será construído um grafo, descrevendo o caminho de Alice ao longo da história, analisando a aplicação de mudança de bases numéricas, probabilidades, lógica matemática e conjuntos numéricos.

2.1 Grafos

Nesta seção será apresentado uma introdução sobre grafos, algumas definições, aplicações e importância. Apesar do conteúdo de grafos não constar diretamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é evidente em aplicações em logística e de distribuição de redes elétricas a sua importância. É possível em atividades extras explorar esse assunto com os alunos, a partir, por exemplo do problema do caixeiro viajante em uma versão mais básica para adequar-se a compreensão do aluno do ensino médio.

> As idéias básicas de grafos foram introduzidas no século XVIII, pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler. Ele usou grafos para resolver o problema hoje conhecido como As sete pontes de Königsberg. Este foi o ponto de partida para se dar início à teoria dos grafos e um novo ramo da matemática chamado topologia. [8]

O problema das pontes de Köenisberg (hoje Kaliningrado) consistiu em analisar se seria possível atravessar as sete pontes, sem passar pela mesma ponte duas vezes e retornar ao ponto de partida [23]. O problema é apresentado na figura a seguir:

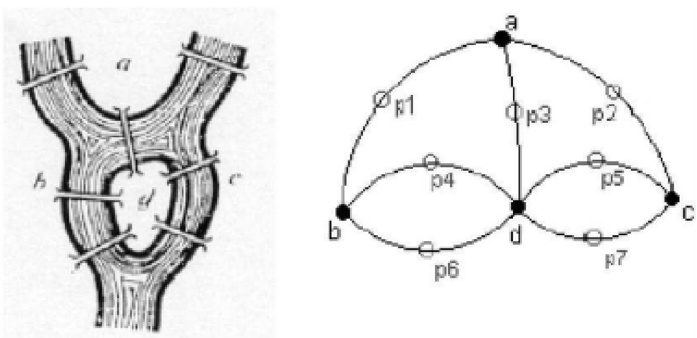


Figura 2.2: Pontes de Köenisberg
Fonte: [23]

2.1.1 Definição de um Grafo

Definição 1 (Grafo Finito)**.** *Um grafo (finito) G é formado por um par $(V(G), A(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto finito não vazio e $A(G)$ uma família de pares não ordenados de elementos, não necessariamente distintos, de $V(G)$. Uma família é uma coleção de elementos, os quais podem ser repetidos.*

Definição 2 (Grafo Simples)**.** *Um grafo simples G é formado por um par $(V(G), A(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto não vazio e $A(G)$ um conjunto de pares distintos não ordenados de elementos distintos de $V(G)$.*

Ou seja, um grafo é formado por dois conjuntos finitos: um conjunto de vértices e um conjunto de arcos, que são as arestas, onde, cada aresta é comum a dois vértices. Um grafo é representado por $G = (V(G), A(G))$.

A quantidade de vezes que as arestas incidem em um vértice v é denominado grau do vértice v, e denotamos por $d(v)$. A soma dos graus dos vértices é sempre o dobro do número de arestas de G. Como uma aresta incide em dois vértices, ao contarmos os graus de cada vértice estaremos contando cada aresta duas vezes. [23]

2.1.2 Aplicações e importância

Grafos são utilizados para solucionar diversos problemas do cotidiano, como na representação de mapa de estradas, rotas de distribuição, rede de comunicação, etc. observe o seguinte exemplo: o grafo a seguir representa a rota do recolhimento de lixo de uma pequena cidade [8, 23].

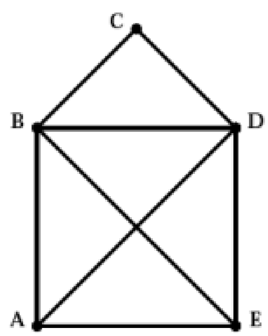


Figura 2.3: Grafo da rota do recolhimento de lixo
Fonte: [8]

Para economizar, o prefeito pretende que o caminhão passe somente uma vez por cada rua da cidade, o que não será possível, pois pelo teorema de Euler, para que tenhamos um caminho fechado, é necessário que todos os vértices do grafo tenham grau par, ou seja, todos os vértices se relacionam com um número par de arestas, neste caso o grafo é chamado de Euleriano[1].

No exemplo dado acima, é possível observar que os vértices A e E apresentam grau ímpar. Neste caso se o caminhão partisse do ponto A finalizaria sua rota no ponto E, e visse versa. Mas, se o grafo do mapa da cidade fosse o seguinte.

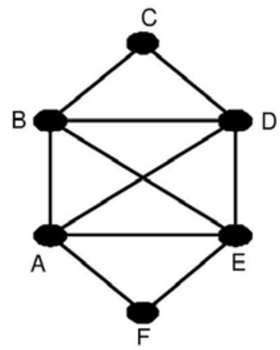


Figura 2.4: Grafo Euleriano
Fonte: [23]

Desta vez o prefeito da cidade ficaria contente? (Tente desenhar o grafo partindo de um vértice e finalizando no mesmo). Este é um dos diversos exemplos sobre a aplicação da teoria dos grafos.

2.1.3 Grafo do caminho de Alice

Ao longo do Romance Matemático, Alice visita vários lugares e conhece diversos personagens e suas histórias, até que no final, acorda e está novamente ao lado de sua irmã. Desta forma será considerado cada lugar visitado por Alice como um ponto (vértice) e o caminho percorrido para chegar em cada lugar como as arestas. Então, sejam os pontos, a descrição dos acontecimentos referentes aos mesmos, e a construção, passo a passo, do grafo do caminho:

A — Ribanceira: Alice estava cansada de ficar sentada ao lado de sua irmã sem fazer nada, até avistar um coelho branco e o segue.

[1]Teorema de Euler (Euler – 1736). Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par.

B — Grande Salão: após seguir o coelho e cair em um buraco, Alice se depara com um grande salão, bem iluminado, com várias portas e no centro havia uma mesa de vidro, contendo uma chave dourada sobre. Alice testou todas as portas, porem a chave só servira para uma pequena porta, que dava para um grande jardim, e a garota era grande demais para atravessá-la. Após diminuir e aumentar (bebendo de uma garrafa que estava sobre a mesa e comendo um bolo que estava sob a mesa, respectivamente) e não conseguir de forma alguma passar pela porta, o coelho retorna e se assusta com Alice, deixando cair um par de luvas e um leque, que são recolhidos pela garota.

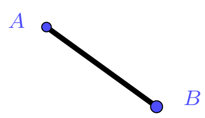


Figura 2.5: Grafo do caminho 1

C — Casa do Coelho: utilizando o leque, Alice percebeu estar diminuindo novamente. Mais tarde o coelho regressa à procura do que havia perdido e confundiu Alice com uma criada (Mary Ann), ordenando-a que busque um par de luvas e um leque. Alice corre na direção que o coelho apontou, entra na casa do coelho e encontra o que fora solicitado, mas antes de sair da casa se depara com uma garrafinha junto ao espelho, que não apresentava nenhum rotulo, mesmo assim a garota não hesitou em beber e logo estava tão grande que teve que se ajeitar para caber dentro da casa. O seu crescimento espontâneo acabou assustando algumas das criaturas, que começaram a jogar pedrinhas no braço de Alice que estava para fora da janela, estas pedrinhas se transformaram em bolinhos, fazendo a garota diminuir novamente. Em fuga Alice sai correndo para um denso bosque.

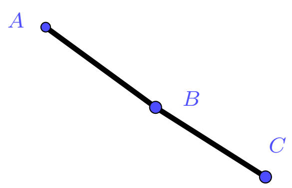


Figura 2.6: Grafo do caminho 2

D — Cogumelo: no bosque, Alice acabou encontrando uma lagarta fumando narguilé sobre um cogumelo e ao conversarem, disse a lagarta que desejava ajustar o seu tamanho, considerando seus $8cm$ como desprezível. A lagarta então sai de cima do cogumelo e informou que um lado do cogumelo a faria crescer, enquanto o outro lado a faria diminuir. Alice abre bem os braços, tirando um pedaço de cada lado, e mordiscando os pedaços foi ajustando o seu tamanho.

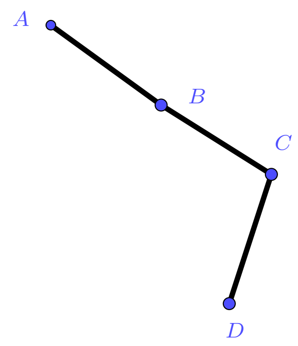


Figura 2.7: Grafo do caminho 3

E — Casa da Duquesa: seguindo pelo bosque, Alice encontra a casa da Duquesa e se depara com uma confusão, vendo a cozinheira jogando muita pimenta na comida, o que fazia com que a Duquesa, o Gato de Cheshire e o Bebê espirrassem muito. A Duquesa deixa o bebê com Alice para ir jogar com a Rainha de Copas. Então, Alice sai da casa e percebe que o bebê havia se transformado em um porco, assim, o solta e segue pelo bosque. Mais adiante encontra o Gato de Cheshire que lhe indica dois caminhos possíveis, a casa do Chapeleiro Maluco ou a casa Da Lebre de Março.

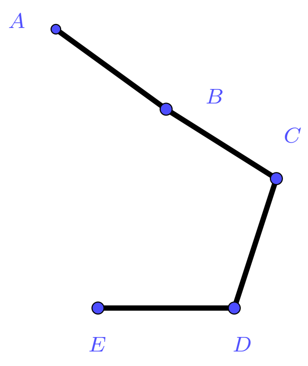


Figura 2.8: Grafo do Caminho 4

F — Casa do Chapeleiro Maluco: Alice decide não visitar o Chapeleiro, pois deduziu que ele era louco.

G — Casa da Lebre de Março: em frente à casa da Lebre havia uma mesa posta sob uma árvore, onde a Lebre, o Chapeleiro e um Caxinguelê tomavam chá. Mesmo não sendo convidada a garota se junta a eles e tenta desvendar a charada do Chapeleiro, "por que um corvo se parece com uma escrivaninha?". Alice não desvenda a charada, pois não havia resposta. Após escutar algumas histórias e várias provocações, a garota se retira nervosa, prometendo nunca mais voltar.

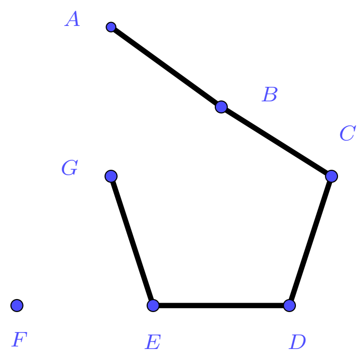


Figura 2.9: Grafo do caminho 5

B — Grande Salão: andando pelo bosque, Alice percebe que em uma das árvores havia uma porta, que levava novamente ao Grande Salão. Desta vez Alice fez os procedimentos diferentes, pois pegou primeiro a chave de ouro na mesa de vidro e destrancou a porta, após isso ela comeu o cogumelo, fazendo-a diminuir seu tamanho para então conseguiu passar pela portinha, chegando finalmente ao grande jardim.

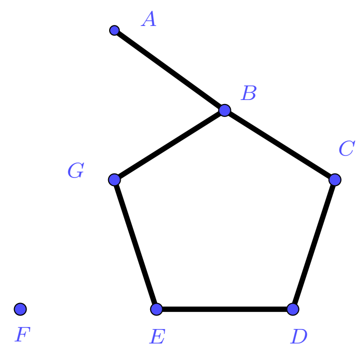


Figura 2.10: Grafo do caminho 6

H — Campo de Croqué da Rainha: chegando ao jardim, Alice assistiu ao cortejo real e foi convidada pela Rainha de Copas a participar do jogo de croqué. O jogo era curioso, o campo era cheio de buracos e saliências, os tacos eram flamingos vivos, as bolas, ouriços, e os arcos eram formados pelos soldados que se moviam a todo tempo. Todos jogavam ao mesmo momento, sem esperar a vez do outro. Alice não conseguia manobrar o seu flamingo. Após acompanhar um jogo totalmente sem noção, onde, exceto Alice, todos os jogadores foram condenados a execução, a Rainha leva Alice para conhecer a tartaruga falsa.

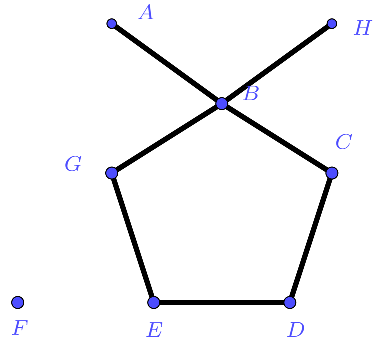


Figura 2.11: Grafo do caminho 7

I — Praia: a Rainha deixa Alice com o Grifo, que a leva até a Tartaruga Falsa. O Grifo apresenta Alice a Tartaruga e diz que ela gostaria de conhecer a sua história. Então a Tartaruga conta de quando ainda era uma Tartaruga de verdade, sua forma estranha de estudo, que começava com 10 horas de aula do primeiro dia e diminuía 1 hora a cada dia. Depois Alice aprende a quadrilha da lagosta. Após isso ouviu-se um brando a distância: "O julgamento está começando!" O Grifo tomou Alice pela mão e saiu correndo, sem esperar que a Tartaruga terminasse o que contava.

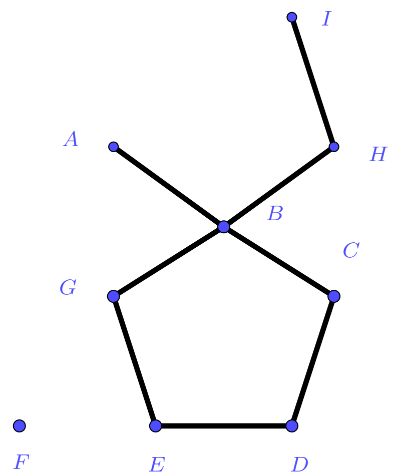


Figura 2.12: Grafo do caminho 8

J — Tribunal: quando chegaram, o Rei e a Rainha estavam sentados em seus tronos, com uma multidão reunida a sua volta. O Juiz era o Rei, havia doze criaturas como jurados e o Valete de Copas estava sendo acusado pelo roubo das tortas. As testemunhas foram o Chapeleiro, a Cozinheira da Duquesa e Alice, porém, seus depoimentos de nada serviram. A Rainha já impaciente, ordenou que os jurados apresentassem a veredito, mas antes queria a sentença. Isto indignou Alice, que disse ser um absurdo ter a sentença antes do veredito. A rainha ficou nervosa com a garota questionado a sua autoridade e ordenou que cortassem a cabeça, porém ninguém se moveu e Alice disse: "Quem se importa com vocês? Não passam de um baralho". Essas palavras fizeram com que o baralho inteiro a atacasse.

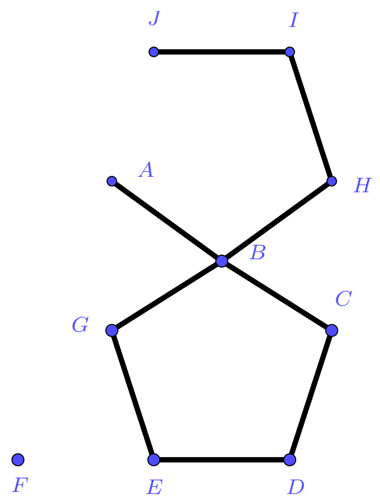


Figura 2.13: Grafo do caminho 9

A — Ribanceira: no momento do ataque, Alice acorda e está novamente na ribanceira ao lado de sua irmã. A garota conta o sonho estranho e as aventuras que se passaram no mesmo e sua irmã fica imaginando como seria o País das Maravilhas.

Assim, temos o grafo completo do caminho de Alice.

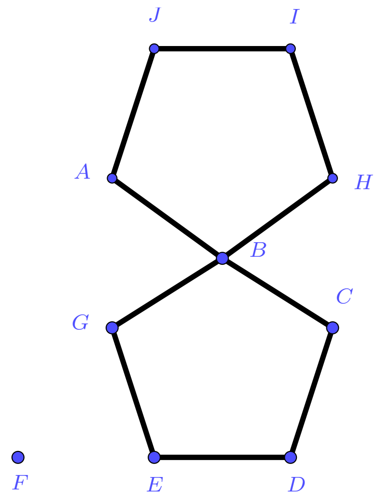


Figura 2.14: Grafo do caminho 10

Obtemos o grafo $G = (V(G), A(G))$, onde $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, $A = \{AB, BC, CD, DE, EG, GB, BH, HI, IJ, JA\}$ e F um vértice isolado, pois não possui nenhuma aresta incidente. O grafo obtido é euleriano, pois todos os vértices possuem grau par, ou seja, o grafo possui um caminho fechado.

Esta é uma ideia de como inserir o estudo de grafos nas aulas, para apresentar a noção de vértices ou pontos e arestas.

Na próxima seção será tratado o assunto mudança de bases numéricas, inicialmente fazendo uma fundamentação sobre o tema, e depois a aplicação do mesmo em um trecho de Alice no País das maravilhas.

2.2 Mudança de base numérica

Utilizamos em nosso dia-a-dia com mais frequência o sistema de numeração de base decimal para representar os números, que é compreendido por dez algarismos, sendo eles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Os computadores, utilizam o sistema de numeração binário, ou seja, de base dois, seus algarismos são conhecidos como *bits* e representados pelos símbolos 0 e 1. Esses são sistemas de numeração posicional, ou seja, a posição de cada algarismos ou a sua ordem na representação do número, indica a qual potência devemos elevar a base numérica.

Um número x na base β é representado por

$$x = (a_m a_{m-1} ... a_1 a_0, b_1 b_2 ... b_n)_\beta$$

Onde:

- a_i é o algarismo da parte inteira;
- b_i é o algarismo da parte fracionaria;
- m é a ordem do algarismo da parte inteira, menos 1;
- n é a ordem do algarismo da parte fracionaria.

Com isso temos:

$x = a_m\beta^m + a_{m-1}\beta^{m-1} + ... + a_1\beta^1 + a_0\beta^0 + b_1\beta^{-1} + b_2\beta^{-2} + ... + b_n\beta^{-n}$

Com

$$a_i, i = 0, 1, 2, ..., m$$

e

$$b_j, j = 1, 2, ..., n$$

E, são elementos do conjunto

$$A = \{K \in \mathbb{N}; 0 \leq K \leq \beta - 1\}$$

Desta maneira, no sistema decimal, ou seja, em base 10, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; em base octal, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; na base 2, ou binário, $A = \{0, 1\}$. Observe alguns exemplos da aplicação [37]:

$$(1995)_{10} = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$(19, 95)_{10} = 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

Podemos dizer que para converter um número inteiro x da base 10 para base β, divide-se sucessivamente x por β, até que o último quociente seja menor que β. O novo número será composto pelo último quociente e os restos das divisões, lidos no sentido inverso, como apresentado no esquema abaixo [37]

$$
\begin{array}{cccccc}
x & \multicolumn{1}{|l}{\beta} & & & & \\ \cline{2-2}
r_1 & q_1 & \multicolumn{1}{|l}{\beta} & & & \\ \cline{3-3}
 & r_2 & q_2 & \beta & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & q_n & \multicolumn{1}{|c}{\beta} \\ \cline{6-6}
 & & & & r_n & q < \beta
\end{array}
$$

Portanto obtemos o número $x = (qr_n \ldots r_2 r_1)_\beta$. Veja os seguintes exemplos [13]:

a) Converter 13, que está na base 10 para a base 2.

$$
\begin{array}{ccccc}
13 & \underline{|\ 2} & & & \\
1 & 6 & \underline{|\ 2} & & \\
 & 0 & 3 & \underline{|\ 2} & \\
 & & 1 & 1 & \underline{|\ 2} \\
 & & & 1 & 0
\end{array}
$$

Logo $(13)_{10} = (1101)_2$

b) Converter 0,75 da base 10 para a base 2. Para este caso, deve-se multiplicar a parte decimal por 2, sucessivamente. O número será obtido tomando a parte inteira de cada multiplicação. Então:

$$0,75 \times 2 = 1,50$$
$$0,5 \times 2 = 1,00$$
$$0,0 \times 2 = 0,00$$

Logo $(0,75)_{10} = (0,110)_2$

2.2.1 Visualização de mudança de base numérica na obra

No capítulo 2 (Uma Lagoa de Lágrimas), Alice tenta fazer multiplicações, mas encontra resultados estranhos.

> Vou tentar ver se consigo me lembrar de todas as coisas que eu sabia. Deixe-me ver: quatro vezes cinco é igual a doze, e quatro vezes seis é igual a treze, e quatro vezes sete é.... Ai, desse jeito, eu nunca vou chegar a vinte! [7]

A tabuada do 4 de Alice não tem muito sentido, mas pode-se notar que as respostas avançam uma unidade por vez, como pode ser visto na tabela a seguir.

Multiplicações	4× 5	4× 6	4× 7	4× 8	4× 9	4× 10	4× 11	4× 12	4× 13
Respostas	12	13	14	15	16	17	18	19	- - -

Tabela 2.1: Multiplicações de Alice

Porém, pela matemática tradicional, a certeza que 4×13 é igual a 20 é questionável. Sabendo isso, agora podemos analisar os cálculos de Alice. Pela lógica de Alice 4×5=12, neste caso vale a pergunta: Quando o produto de 4 por 5 é igual a 12? Sabemos que 4×5=20 na base decimal, então quando que 20 será igual 12? Logo, temos que

$$20_{10} = 12_b$$
$$20 = 1.b^1\ + 2.b^0$$
$$20 = b + 2$$
$$b = 18$$

Então o produto de 4 por 5 será 12 quando trabalhamos na base 18.

Seguindo as multiplicações de Alice temos agora que 4×6=13, e sabemos que na base decimal este produto resulta em 24, logo temos que

$$24_{10} = 13_b$$
$$24 = 1.b^1 + 3.b^0$$
$$24 = b + 3$$
$$b = 21$$

Acompanhando a lógica da garota a próxima multiplicação resultará em 14. Compreendemos que 4×7=28 na base decimal, então temos que

$$28_{10} = 14_b$$
$$28 = 1.b^1 + 4.b^0$$
$$28 = b + 4$$
$$b = 24$$

O próximo produto seria 4×8 = 15, e novamente temos que

$$32_{10} = 15_b$$
$$32 = 1.b_1 + 5.b_0$$
$$32 = b + 5$$
$$b = 27$$

Nota-se que, à medida que são feitas as multiplicações, a base está aumentando de 3 em 3 unidades, como pode ser visto na tabela a seguir.

Multiplicações	4×5	4×6	4×7	4×8	4×9	4×10	4×11	4×12	4×13
Respostas (Base)	12 (18)	13 (21)	14 (24)	15 (27)	16 (30)	17 (33)	18 (36)	19 (39)	- - - (42)

Tabela 2.2: Multiplicações de Alice

Visto que não é certo o produto 4×13 é igual a 20, verificamos que esta multiplicação está na base 42. Sabemos que 4×13 é 52 na base decimal, então basta passar o número 52 para a base 42 para encontrarmos o resultado da multiplicação, segundo a lógica de Alice. Para isso será considerado as igualdades: $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $\ldots$, $Z = 36$. Então temos.

52 para a base 42

$$\begin{array}{lll} 52 & \underline{|\ 42} & \\ \underbrace{10} & \ \ 1 & \underline{|\ 42} \\ & \ \ \underbrace{1} & \ \ 0 \end{array}$$

Portanto obtemos o número formado pelos algarismos 1 e 10, ou seja, substituindo 10 por A, 52 na base 42 é igual a $1A$. Indo adiante nas multiplicações de Alice, teremos agora que passar 56 para a base 45 e 60 para a base 48. Então temos.

56 para a base 45

$$\begin{array}{lll} 56 & \underline{|\ 45} & \\ \underbrace{11} & \ \ 1 & \underline{|\ 45} \\ & \ \ \underbrace{1} & \ \ 0 \end{array}$$

e

60 para a base 48

$$\begin{array}{lll} 60 & \underline{|\ 48} & \\ \underbrace{12} & \ \ 1 & \underline{|\ 48} \\ & \ \ \underbrace{1} & \ \ 0 \end{array}$$

Logo 4x14 é igual a $1B$ na base 45 e 4x15 é igual a $1C$ na base 48. Como a base está sempre crescendo 3 unidades, à medida que é realizado as multiplicações, logo nunca a resposta será 20.

A mesma resposta é apresentada na seguinte tabela:

	Base 10	Na Base	É
4×3	12	12	10
4×4	16	15	11
4×5	20	18	12
4×6	24	21	13
4×7	28	24	14
4×8	32	27	15
4×9	36	30	16
4×10	40	33	17
4×11	44	36	18
4×12	48	39	19
4×13	52	42	1 A

Tabela 2.3: Mudança de bases
Fonte: [16, 41].

Outra solução é apresentada na seguinte Tabua da operação multiplicação, que foi redigitada para uma melhor compreensão, porém, não alterando os dados:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1 (6)	2 (6)	3 (6)	4 (6)	5 (6)	10 (6)	11 (6)	12 (6)	13 (6)	14 (6)	15 (6)	20 (6)
2	2 (6)	4 (7)	6 (8)	8 (9)	10 (10)	11 (11)	12 (12)	13 (13)	14 (14)	15 (15)	16 (16)	17 (17)
3	3 (6)	6 (8)	9 (10)	10 (12)	11 (14)	12 (16)	13 (18)	14 (20)	15 (22)	16 (24)	17 (26)	18 (28)
4	4 (6)	8 (9)	10 (12)	11 (15)	12 (18)	13 (21)	14 (24)	15 (27)	16 (30)	17 (33)	18 (36)	19 (39)
5	5 (6)	10 (10)	11 (14)	12 (18)	13 (22)	14 (26)	15 (30)	16 (34)	17 (38)	18 (42)	19 (46)	1T (50)
6	10 (6)	11 (11)	12 (16)	13 (21)	14 (26)	15 (31)	16 (36)	17 (41)	18 (46)	19 (51)	1T (56)	1E (61)
7	11 (6)	12 (12)	13 (18)	14 (24)	15 (30)	16 (36)	17 (42)	18 (48)	19 (54)	1T (60)	1E (66)	1W (72)
8	12 (6)	13 (13)	14 (20)	15 (27)	16 (34)	17 (41)	18 (48)	19 (55)	1T (62)	1E (69)	1W (76)	1H (83)
9	13 (6)	14 (14)	15 (22)	16 (30)	17 (38)	18 (46)	19 (54)	1T (62)	1E (70)	1W (78)	1H (86)	1F (94)
10	14 (6)	15 (15)	16 (24)	17 (33)	18 (42)	19 (51)	1T (60)	1E (69)	1W (78)	1H (87)	1F (96)	1N (105)
11	15 (6)	16 (16)	17 (26)	18 (36)	19 (46)	1T (56)	1E (66)	1W (76)	1H (86)	1F (96)	1N (106)	1X (116)
12	20 (6)	17 (17)	18 (28)	19 (39)	1T (50)	1E (61)	1W (72)	1H (83)	1F (94)	1N (105)	1X (116)	1V (127)

Tabela 2.4: Tabela completa da mudaça de bases
Fonte: [1]

A Tabua é comutativa, pois $5 \times 2 = 10$, e $2 \times 5 = 10$. Porém, não é associativa, uma vez que $(5 \times 2) \times 3 = 10 \times 3 = 16$, mas $5 \times (2 \times 3) = 5 \times 6 = 14$. Então Alice estava certa, realmente a resposta nunca seria 20, para a tabuada do 4, sendo que a única maneira de obter o resultado seria $1 \times 12 = 20$ [1].

Apresentei nesta seção o assunto de mudança de bases numéricas, assim como alguns resultados. Na próxima seção, será tratado de noções de probabilidade, inicialmente fazendo uma fundamentação sobre o tema e depois a aplicação do mesmo em um trecho de Alice no País das maravilhas.

2.3 Noções de Probabilidade

Tendo em vista que a BNCC (Base nacional comum curricular) traz a probabilidade como uma unidade temática, tanto para as competências do ensino fundamental I e II, quanto para o médio, e focando na seguinte habilidade:

> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. [4]

Trago essa seção para apresentar a noção de probabilidade utilizando o contexto da história de Alice no País das Maravilhas, fazendo anteriormente a fundamentação do conteúdo.

2.3.1 Experimentos aleatórios

São experimentos aleatórios aqueles, que repetidos várias vezes em condições idênticas, produzem resultados que não podem ser previstos, porém, podemos descrever todos os resultados possíveis. Como no lançamento de uma moeda, de um dado, ou até dos dois simultaneamente, onde podemos encontrar vários resultados que não podem ser controlados, aos quais denominamos ao acaso [19].

2.3.2 Espaço amostral

Espaço amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis e simbolizamos por Ω [19]. Por exemplo, no lançamento de uma moeda podemos ter dois resultados, cara (k) ou corroa (c), então nosso espaço amostral será $\Omega = \{k, c\}$, e no lançamento de um dado teremos nosso espaço amostral será $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Para o lançamento simultâneo de uma moeda eu um dado, o nosso espaço amostral será $\Omega = \{(k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)\}$.

2.3.3 Evento

Em um experimento aleatório, chamamos de evento todo subconjunto do espaço amostral Ω e indicamos por uma letra maiúscula do alfabeto. [19]

Utilizando o exemplo anterior, do lançamento simultâneo de uma moeda e um dado, podemos ter o seguinte evento E: ocorrência de cara e número par. Logo $E = \{(k, 2), (k, 4), (k, 6)\}$, ou seja, são três possibilidades dentro do nosso espaço amostral.

2.3.4 Cálculo de probabilidade

Para encontrar a probabilidade de um evento A ocorrer em um determinado espaço amostral Ω, basta efetuarmos a razão [18]

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Desta maneira, utilizando o exemplo anterior, no lançamento simultâneo de uma moeda e um dado, qual a probabilidade da ocorrência de cara e número par? Sabemos o evento $E = \{(k, 2), (k, 4), (k, 6)\}$ e o nosso espaço amostral $\Omega = \{(k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)\}$, então temos três possibilidades do evento ocorrer, em um total de doze possibilidades do espaço amostral, portanto

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{3}{12}$$

$$P(E) = \frac{1}{4}$$

Ou seja, a probabilidade desse evento ocorrer é 0,25 ou 25%.

2.3.5 Visualização da noção de probabilidade na obra

No capítulo 5 (Conselho de Uma Lagarta), Alice quer aumentar de tamanho, e se encontra em uma situação de escolha:

> – Bom, eu gostaria de ser um pouquinho maior, se a senhora não se importasse [...] Depois de um ou dois minutos, a Lagarta tirou o narguilé da boca, bocejou uma ou duas vezes e se sacudiu. Aí, desceu do cogumelo e saiu rastejando pela relva. Enquanto se afastava, dizia o seguinte:
> - Um lado fará você crescer; o outro lado fará você diminuir.
> - Um lado de quê? Outro lado de quê? - Alice ficou pensando.
> - Do cogumelo - explicou a Lagarta [7]

Neste caso, o evento seria pegar um pedaço que à faria crescer e o espaço amostral equivaleria a toda a circunferência do cogumelo, no qual, metade da circunferência a faria crescer (c) e a outra metade, diminuir (d), então o espaço amostral será $\Omega = \{c, d\}$. Desta maneira, escolhendo um pedaço ao acaso, a probabilidade seria

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

Logo, a garota tem 0,5 ou 50 % de chance de pegar um pedaço na parte que a faz crescer.

Este é um exemplo que pode ser inserido nas aulas para trabalhar probabilidade, ou até introduzir o assunto com os alunos. Na próxima seção será apresentado algumas noções de lógica matemática, fundamentando o tema e então fazendo a aplicação do mesmo em dois trechos de Alice no País das Maravilhas.

2.4 Noções de Lógica Matemática

A lógica pode ser definida da seguinte maneira:

> Dá-se o nome de Lógica ao estudo sistemático do pensamento dedutivo, que permite construir argumentos corretos no estudo científico, e que possibilita distinguir os argumentos corretos dos incorretos. A lógica, portanto, pode ser aplicada a qualquer estudo científico quer seja nas ciências naturais, humanas e exatas. A Matemática, por exemplo, utiliza amplamente a Lógica como principal ferramenta para a demonstração de seus teoremas e fundamentos. [11]

Uma proposição transmite um pensamento, ou seja, afirma fatos, por exemplo: “a Lua é satélite da Terra”. Em Lógica Matemática adotamos dois princípios, o Princípio da não Contradição: uma proposição não pode ser verdadeira (V) e falsa (F) ao mesmo tempo, e o Princípio do Terceiro Excluído: toda proposição é verdadeira ou falsa, sem haver um terceiro caso. [12]

Uma proposição lógica simples é qualquer sentença declarativa, que aponta fatos verdadeiros ou falsos. Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não representam uma proposição lógica. As proposições simples são, normalmente, representadas pela letras minúsculas p, q, r, s e t. Por exemplo, p: "ele é um administrador de empresas", caso a proposição lógica for verdadeira, ela é representada por $v(p) = V$. [11]

Uma proposição lógica composta é formada por duas ou mais proposições simples, e são representadas, normalmente, pelas letras maiúsculas P, Q, R, S e T. Para unir as proposições são utilizados os conectivos "e", "ou", "não", "se ... então ..." "...se e somente se ...". Por exemplo, P: O número 6 é par e o número 8 é um cubo perfeito. O valor lógico de uma proposição composta depende dos valores lógicos das proposições simples que à compõem. [12]. Considerando o exemplo anterior, temos as proposições p: "o número 6 é par", que pode ser V ou F, e a proposição q: "o número 8 é um cubo perfeito", que também pode assumir os valores lógicos V ou F. Desta maneira se a primeira proposição for V a segunda pode ser V ou F, ou se for falsa a segunda também pode ser V ou F, como mostra a tabela verdade abaixo.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabela 2.5: Tabela lógica

Porém, sabemos que as proposições são verdadeiras, pois 6 é um número par e 2^3 é igual a 8, então $v(P) = V$.

2.4.1 Operações lógicas

Como na aritmética sobre os números, para as proposições também efetuamos operações, que são as operações lógicas, e obedecem um cálculo proposicional. Empregamos as seguintes operações: negação, conjunção, disjunção, condicional e bi-condicional, que estão descritas a seguir [12].

Negação ($\sim$), aparece nas proposições com o conectivo "não", ou seja, a negação da proposição p seria não p, representada por $\sim p$, neste caso o valor lógico da proposição é invertido, como pode ser observado na tabela verdade abaixo.

p	∼p
V	F
F	V

Tabela 2.6: Tabela lógica da negação
Fonte: [12]

Conjunção ($\wedge$), nas proposições utiliza o conectivo "e", e somente obterá valor lógico V, se os valores lógicos das proposições que a compõem forem verdadeiros. Para os demais casos o valor lógico será falso, como pode ser observado na tabela verdade abaixo.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 2.7: Tabela lógica da conjunção
Fonte: [12]

Disjunção ($\vee$), utiliza o conectivo "ou", e a proposição será verdadeira quando pelo menos uma das proposições for verdadeira. No caso de todas as proposições serem falsas, o valor lógico será falso, como pode ser observado na tabela verdade abaixo.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 2.8: Tabela lógica da disjunção
Fonte: [12]

Condicional ($\rightarrow$), aparece nas proposições com o conectivo "se ... então ...", e seu valor lógico será falso quando a primeira proposição for verdadeira e a segunda falsa, para os demais casos o valor lógico é verdadeiro, como pode ser observado na tabela verdade abaixo.

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 2.9: Tabela lógica da condicional
Fonte: [12]

Bi-condicional (↔) utiliza o conectivo "...se e somente se ...". A proposição será verdadeira quando os valores lógicos das proposições que à compõem forem iguais, ou seja, se a primeira proposição for verdadeira e a segunda verdadeira, o valor lógico será verdadeiro, e se a primeira for falsa e a segunda for falsa, o valor lógico também será verdadeiro. Para os demais casos o valor lógico é falso. Como pode ser observado na tabela verdade abaixo

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 2.10: Tabela lógica da bi-condicional
Fonte: [12]

2.4.2 Construção de tabelas lógicas

A partir das tabelas verdades das operações lógicas fundamentais, é possível construir a tabela verdade de qualquer proposição composta, e esta mostrará os casos em que os valores lógicos serão verdadeiros ou falsos. O número de linhas depende da quantidade de proposições simples que à integram. Desta maneira, para n proposições simples a tabela verdade terá $2n$ linhas. Assim, segue um exemplo: construir a Tabela Verdade da proposição composta [12]:

$$P(p,q) = \sim (p \wedge \sim q)$$

Constrói-se primeiro uma coluna para cada proposição simples, e ao lado uma coluna pra cada conectivo, e depois completa-se as colunas com os valores lógicos, seguindo uma ordem, como está indicado na tabela abaixo:

p	q	$\sim$	(p	$\wedge$	$\sim$	q)
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
		4	1	3	2	1

Tabela 2.11: Tabela lógica da proposição composta
Fonte: [12]

Os valores lógicos da proposição composta aparecem na coluna completada por último. Portanto, isto é, simbolicamente: $P(VV) = V$, $P(VF) = F$, $P(FV) = V$, $P(FF) = V$ [12].

2.4.3 Visualização de elementos de lógica matemática na obra

No capítulo 5 (conselho de uma Lagarta), logo após Alice comer o pedaço do cogumelo que à faria crescer, de forma que seu pescoço ficasse enorme, a garota tem uma discussão com um pombo:

> Ficou toda feliz ao descobrir que seu pescoço podia se curvar em todas as direções com facilidade, como se fosse uma cobra.
> [...] uma grande Pomba tinha voado até o seu rosto e nele batia violentamente com as asas. – Cobra! – gritou a Pomba. – Eu não sou uma cobra! – disse Alice, indignada. [7]

Em nossa realidade, confundir uma garota com uma cobra seria algo impossível, mas na realidade do País das Maravilhas é algo normal. Relacionando este trecho com lógica matemática, podemos considerar as seguintes premissas [26]:

C : as cobras têm pescoço longo.

A : Alice tem pescoço longo.

E chega à conclusão de que Alice seria uma cobra.

Em lógica Matemática, este é um dos casos mais simples, como, A implica B, B implica C, então A implica C, assim o Pombo concluiu, se Alice tem pescoço comprido e uma cobra também tem o pescoço comprido, então ela é uma cobra [26]. Relação simples que pode ser demostrada facilmente, como uma propriedade de transição dos números: $a > b$, $b > c$ logo $a > c$.

No capítulo 6 (Porco e Pimenta), logo após Alice deixar a casa da Duquesa e seguir pelo bosque, a garota encontra novamente o Gato de Cheshire.

> [...] "Para começar", disse o gato, "um cachorro não é louco. Admite isso? " "Suponho que sim", disse Alice. "Pois bem", continuou o gato, "Você sabe, um cachorro rosna quando está zangado e abana a cauda quando está contente. Ora, eu rosno quando estou contente e abano a cauda quando estou zangado. Portanto sou louco". [6]

Podemos retirar deste trecho, de acordo com o gato, as seguintes Proposições Simples:

p: rosnar quando está zangado.

q: abanar a cauda quando está feliz.

r: ser louco.

Para as proposições do gato teremos a Proposição Composta

$$P(p, q, r) = (p \wedge q) \wedge \sim r,$$

que resulta na seguinte tabela lógica.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

(p	$\wedge$	q)	$\wedge$	$\sim$	r
V	V	V	F	F	V
V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F
1	2	1	4	3	1

Tabela 2.12: Tabela lógica das proposições do gato

De acordo com a tabela verdade podemos observar dois valores lógicos, que são referentes as afirmações do Gato. O primeiro nos diz $P(VVF) = V$, ou seja, se rosnar quando está zangado e abana a cauda quando está feliz, logo não ser louco, é verdade. Porém, ao analisar o valor lógico $P(FFV) = F$, ou seja, se não rosna quando esta zangado e não abana a cauda quando está feliz, logo ser louco, é uma falsidade. Portanto o Gato não é louco, de acordo com suas proposições, e Alice já tinha notado isto quando acrescentou "chamo isso de ronronar e não rosnar".

Na próxima seção apresento uma breve fundamentação do tema conjuntos numéricos e depois aplicarei em dois trechos de Alice no País das Maravilhas.

2.5 Conjuntos numéricos

Um conjunto é uma coleção de objetos, e estes são chamados de elementos do conjunto. Costuma-se representar por letra maiúscula os conjuntos, e seus elementos por letra minúscula do nosso alfabeto. Assim, se um objeto a é elemento do conjunto U, então a pertence a U, e denotamos $a \in U$, caso contrário denotamos $a \notin U$. Um conjunto pode ser descrito de três maneiras: [10]

1. Por uma sentença que descreve seus elementos, por exemplo "o conjunto dos planetas do sistema solar";

2. Pode ser descrito listando seus elementos entre chaves, por exemplo: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$;

3. Por uma propriedade que identifica seus elementos: $\{x/x$ é inteiro e $x > 2\}$.

Dentre os conjuntos, alguns são representados por notações especiais:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, conjunto dos naturais;

O conjunto dos números naturais é fechado para as operações de adição e multiplicação, ou seja, dados $a, b \in \mathbb{N}$, se $a + b = c$, então $c \in \mathbb{N}$ e se $a \times b = d$, então $d \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, conjunto dos inteiros;

O conjunto dos números inteiros é fechado para as operações adição, subtração e multiplicação, ou seja, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a + b = c$, então $c \in \mathbb{Z}$; se $a - b = d$, então $d \in \mathbb{Z}$ e se $a \times b = e$, então $e \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b}$, com a, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ $\}$, conjunto dos racionais;

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$: dizimas não periódicas e números que não podem ser escritos como $\frac{a}{b}$, com a, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, conjunto dos irracionais;

$\mathbb{R}$: é a união de todos os conjuntos anteriores.

2.5.1 Visualização de conjuntos numéricos na obra

No capítulo 8 (O Campo de Croqué da Rainha), Alice assiste ao cortejo real:

> Primeiro, vieram dez soldados carregando bastões. Tinham todos o mesmo formato dos três jardineiros: eram retangulares e achatados, com as mãos e pés nos cantos. Em seguida vinham os dez cortesãos: estes estavam todos enfeitados com losangos e caminhavam de dois em dois, como soldados. Depois, vinham as crianças da família real: eram dez também, muito graciosas, e também vinham aos pares, mãozinhas dadas, saltitando alegremente. Estavam todas enfeitadas com corações. Atrás, seguiam os convidados, na maioria Reis e Rainhas [...]

> Em seguida aproximou-se o Valete de Copas, carregando a coroa do Rei numa almofada de veludo vermelho. E no fim desse desfile formidável, vinham o Rei e Rainha de Copas. [7]

A maneira que Carroll divide as cartas pelos naipes pode servir para trabalhar as propriedades dos elementos de um determinado conjunto, como o conjunto das cartas de paus, ou de copas, etc. [26]

No final do capítulo 9 (A história da Tartaruga Falsa), pode-se notar uma referência aos números inteiros, positivos e negativos:

> - E quanto tempo passavam estudando diariamente? – perguntou Alice, com a pressa para mudar logo de assunto.
> - Dez horas no primeiro dia, nove no segundo, e assim por diante - respondeu a Tartaruga falsa.
> - Que maneira mais esquisita de estudo! - exclamou Alice.
> - Mas é por isso que o nome é ex-tudo, porque vai diminuindo até o final acabar tudo.
> Esse raciocínio era realmente novo para Alice, e ela ficou pensando sobre isso por um tempo, antes de fazer mais uma observação.
> - Sendo assim, no décimo primeiro dia já estariam de férias?
> - Claro que sim - concordou a Tartaruga Falsa.
> - E o que vocês faziam no décimo segundo dia? - perguntou Alice ansiosa.
> - Chega de falar sobre isso! - interrompeu o Grifo, muito decidido. [7]

Então:

> Por que o Grifo não gostava de falar sobre o décimo segundo dia? Talvez ele não conhecesse os números negativos ou números menores que zero. Os antigos matemáticos não sabiam deles também. Números negativos aparecem pela primeira vez nos trabalhos de Brahmagupta em 628. O matemático francês Blaise Pascal, famoso por seu trabalho com probabilidade, estava convencido de que tais números não existiam. Muitos outros matemáticos contemporâneos também consideravam ridículos. Mesmo assim, no século 18, os números negativos se tornaram parte integrante da álgebra. [41]

Como a sequência dos números está decrescendo, seguindo pela ordem, no décimo dia estudariam uma hora, no décimo primeiro estariam de férias, porque estudariam zero horas, e no décimo segundo dia que estaria o problema, porque não tem como estudar menos uma hora, e é onde entra a ideia de números negativos, e o conjunto dos números inteiros.

Frações, ou o conjunto dos números racionais, é outra ideia que pode ser retirada deste trecho, já que o autor associa a palavra *estudo* com *ex-tudo*. Assim, o todo seria as dez horas do primeiro dia, e a cada dia que passasse, estudariam uma fração do todo, pela sequência $1, \frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \frac{7}{10}, \ldots, \frac{1}{10}, 0$.

Estes são exemplos que podem ser inseridos nas aulas para trabalhar ou introduzir o assunto com os alunos.

Capítulo 3

A matemática presente no livro "O Homem que Calculava"

Neste Capítulo será apresentado algumas aplicações de matemática na mais famosa obra de Malba Tahan, O Homem que Calculava, fazendo inicialmente uma breve descrição do autor.

Júlio Cesar de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo Malba Tahan, nasceu em 6 de maio de 1895 no Rio de Janeiro, foi professor, educador, pesquisador, arquiteto, engenheiro, escritor e editor. Note que, em seus nomes, inclusive seu pseudônimo, cada um contem 5 letras. Completou seu ensino fundamental e médio nos Colégios Militar e Pedro II no Rio de Janeiro. Formou-se professor pela Escola Normal e engenheiro pela Escola Nacional de Engenharia. Lecionou no Colégio Mello e Souza, o Colégio Pedro II, a Escola Normal e na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Foi casado com Nair Marques da Costa com quem teve três filhos [30]. Publicou mais de 120 livros, dos quais 51 eram sobre matemática, sendo O Homem que Calculava, seu sucesso de vendas, algumas dessas

Figura 3.1: Júlio César de Mello e Souza
Fonte: [30]

obrar estão apresentadas no Apêndice 2.

Júlio Cesar faleceu aos 79 anos, no dia 18 de junho de 1974 e neste dia ele ministrava um curso para professores em Recife. O Governo do Brasil, em 2013, instituiu em sua homenagem, o Dia Nacional da Matemática, na data de seu nascimento [30].

Diferentemente do livro "Alice no País das Maravilhas", a matemática em "O Homem Que Calculava"é encontrada mais evidenciada e explicada, onde a maioria dos problemas apresentados são resolvidos por Beremiz, o protagonista da história.

Nas seções a seguir, serão apresentados 5 trechos do livro, contendo referências a possíveis aplicações em sala de aula, sendo eles: A Divisão dos 35 Camelos; O Pagamento de Oito Pães com Oito Moedas; Os Quatro Quatros; Números Perfeitos e Os Cálculos dos Grãos de Trigos das Casas do Tabuleiro de Xadrez.

3.1 A divisão dos 35 camelos

“A divisão dos 35 camelos” é um dos problemas mais famosos do livro de Malba Tahan, além de famoso, é um problema muito interessante para ser trabalhado em sala de aula, pois resgata algumas propriedades dos números naturais e racinais, mais especificamente as operações com frações. Antes de lermos o trecho, vamos relembrar tais operações.

Adição e Subtração com denominadores iguais (repete o denominador e opera os numeradores):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \text{ com } b \neq 0$$

e

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}, \text{ com } b \neq 0$$

Adição de Subtração com denominadores diferentes (para alunos com dificuldade nesta operação, pesquise e aplique o método da borboleta):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}, \text{ com } b, d \neq 0$$

e

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}, \text{ com } b, d \neq 0$$

Multiplicação (produto dos numeradores pelo produto dos denominadores):

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}, \text{ com } b, d \neq 0$$

Divisão (produto da fração do numerador pelo inverso da fração do denominador):

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}, \text{ com } b, c, d \neq 0$$

Seguimos agora para o trecho que narra a divisão de 35 camelos para 3 irmãos.

> Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.
> Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:
> — Não pode ser!
> — Isto é um roubo!
> — Não aceito!
> O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.
> — Somos irmãos — esclareceu o mais velho — e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte, e, ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos, e, a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas? [39]

Efetuando as divisões propostas temos que o:

- Irmão 1 deve receber $\frac{35}{2} = \frac{34}{2} + \frac{1}{2} = 17 + \frac{1}{2}$, então falta $\frac{1}{2}$ de camelo para completar 18 camelos;
- Irmão 2 deve receber $\frac{35}{3} = \frac{33}{3} + \frac{2}{3} = 11 + \frac{2}{3}$, então falta $\frac{1}{3}$ de camelo para completar 12 camelos;
- Irmão 3 deve receber $\frac{35}{9} = \frac{27}{9} + \frac{8}{9}$, então falta $\frac{1}{9}$ de camelo para completar 4 camelos.

Fazendo a soma das quantidades de camelos que cada irmão deve receber, temos:

$$17 + \frac{1}{2} + 11 + \frac{2}{3} + 3 + \frac{8}{9},$$

notemos que $mmc \quad (2, 3, 9) = 18$, então:

$$17 + 11 + 3 + \frac{9 + 12 + 16}{18} = 33 + \frac{1}{18}$$

que não é igual ao total de camelos da herança, pois sobraram:

$$35 - \left(33 + \frac{1}{18}\right) = 2 - \frac{1}{18} = \frac{36-1}{18} = \frac{35}{18} = \frac{18+17}{18} = 1 + \frac{17}{18}.$$

Note que pela partilha proposta pelo pai dos três irmãos sobraria um camelo inteiro, note, também, que

$$\frac{17}{18} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9},$$

justamente a quantidade que estava faltando para cada um dos irmãos, e é claro que isto não é uma coincidência, pois a parte deve completar o todo, uma vez que estamos trabalhando com um número inteiro.

Beremiz já havia percebido que pelas divisões o testador tinha cometido um erro, pois estava sobrando um camelo, então sugeriu:

> — É muito simples — atalhou o Homem que Calculava. — Encarrego-me de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que em boa hora aqui nos trouxe!
> Neste ponto, procurei intervir na questão:
> — Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viajem se ficássemos sem o camelo?
> — Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! — replicou-me em voz baixa Beremiz - Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.
> Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal, que imediatamente foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.
> — Vou, meus amigos — disse ele, dirigindo-se aos três irmãos —, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como vêem em número de 36. [39]

Notemos nessse trecho que Beremiz sabia muito bem o que estava fazendo, pois 36 é divisivel por 2, 3 e 9, uma vez que dados dois números inteiros a e b, neste caso a divide b se existir um número $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$, sem deixar resto [20]. Assim, observemos que $36 = 2 \times 18$, $36 = 3 \times 12$ e $36 = 9 \times 4$. Ciente disto, Beremiz continuou:

> E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:
> — Deverias receber meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.
> E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:
> — E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

> E disse por fim ao mais moço:
> E tu jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4 camelos.
> O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado! [39]

Efetuando, novamente, as divisões, agora com 36 camelos, o:

- Irmão 1 deve receber $\dfrac{36}{2} = 18$ camelos;
- Irmão 2 deve receber $\dfrac{36}{3} = 12$ camelos;
- Irmão 3 deve receber $\dfrac{36}{9} = 4$ camelos.

Fazendo a soma das quantidades de camelos que cada irmão deve receber, temos que:

$$\text{total de camelos} = 18 + 12 + 4 = 34,$$

logo estão sobrando 36 - 34 = 2 camelos, um que pertence a bagdali e o outro que é justamente o camelo que sobrara da divisão anterior, e que foi requerido por Beremiz por ajudar os irmãos com o empasse da divisão, assim como é narrado no seguinte trecho:

> E concluiu com a maior segurança e serenidade:
> — Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir — partilha em que todos três saíram lucrando — couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois.
> Um pertence como sabem ao bagdáli, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido a contento de todos o complicado problema da herança!
> — Sois inteligente, ó Estrangeiro! — exclamou o mais velho dos três irmãos. – Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!
> E o astucioso Beremiz — o Homem que Calculava — tomou logo posse de um dos mais belos "jamales" do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:
> — Poderás agora, meu amigo, continuar a viajem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!
> E continuamos nossa jornada para Bagdá. [39]

Muitos autores citam que ao adicionar um camelo Beremiz completa a quantidade que cada irmão recebeu, mas devemos nos atentar que, na verdade, o número 35 não é divisível por 2, 3 e 9 e o número 36 é divisível.

Na próxima seção será apresentado brevemente os conceitos de razão e proporção, citando o trecho do livro que relata o pagamento de oito pães com oito moedas.

3.2 O Pagamento de oito pães com oito moedas

Para introduzir o conceito de Razão e Proporção com seus alunos ou trabalhar divisão entre números inteiros, pode-se utilizar esse trecho da obra, onde Beremiz e seu companheiro de viagem, bagdali, encontram o xeique Salém Nasair, que acabara de ser roubado, e ajudam-no dividindo sua comida no caminho para Bagdá. Antes de seguir para o trecho, vamos revisar o concito de razão e proporção.

Razão: dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, a razão entre a e b é obtida fazendo $\frac{a}{b}$.

Exemplo: seja $a = 8$ e $b = 4$, então a razão de a por b sera $\frac{8}{4} = 2$, e a razão de b por a sera $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Proporção: dados $a, b, c, b \in \mathbb{N}$, com $b, d \neq 0$, e seja as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, teremos uma proporção quando houver a igualdade de duas, ou mais, razões, ou seja, quando valer $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que implica na propriedade fundamental das proporções $a \times d = b \times c$.

Exemplo: seja $a = 32$, $b = 16$ e $c = 8$, determine o valor de d, sabendo que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $d \neq 0$.

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{32}{16} = \frac{8}{d}$$

que implica em:

$$32 \times d = 16 \times 8$$
$$32 \times d = 128$$

dividindo ambos os membros por 32, temos:

$$d = 4.$$

Na história, a caminho de Bagdá, Beremiz se seu parceiro de viagem encontram o xeique Salém Nasair, que fora roubado e estava ferido e com fome, e decidem ajudá-lo, como narra o seguinte trecho:

> [...] aproximava-nos das ruínas de pequena aldeia denominada Sippar - quando encontramos caído na estrada, um pobre viajante, roto e ferido. Socorremos o infeliz e dele próprio ouvimos o relato de sua aventura.

> Chamava-se Salém Nasair, e era um dos mais ricos mercadores de Bagdá. Ao regressar, poucos dias antes, de Báçora, com grande caravana pela estrada de el-Hilleh, fora atacado por uma chusma de nômades persas do deserto. A caravana foi saqueada e quase todos os seus componentes pereceram nas mãos dos beduínos.
> [. . .] E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiosa:
> — Trazeis por acaso, ó muçulmanos, alguma coisa que se possa comer? Estou quase, quase a morrer de fome!
> — Tenho, de resto, três pães — respondi.
> — Trago ainda cinco! - afirmou a meu lado, o Homem que Calculava.
> — Pois bem — sugeriu o cheique —, juntemos esses pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdá prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer!
> Assim fizemos. No dia seguinte, ao cair da tarde, entramos na célebre cidade de Bagdá, a pérola do Oriente.
> [. . .] O rico Salém Nasair disse-nos, então: — Vou deixar-vos, meus amigos. Antes, porém, desejo agradecer-vos o grande auxílio que ontem me prestastes. E para cumprir a palavra dada, vou pagar já o pão que generosamente me destes!
> E dirigindo-se ao Homem que Calculava disse-lhe:
> — Vais receber pelos 5 pães, 5 moedas!
> E voltando-se para mim, ajuntou:
> — E tu, ó bagdáli, pelos 3 pães, vais receber 3 moedas! [39]

Quando Salém diz "juntemos esses pães e façamos uma sociedade única", ele sugere que junte os 5 pães de Beremiz e os 3 pães de bagdali, dando um total de 8, e que, no caminho para Bagdá, quando sentirem fome dividissem um pão em três pedaços, destinando a cada, um pedaço.

Pelo trecho acima temos uma ideia inicial que Beremiz cedeu a Salém 5 pedaços de pão e bagdali 3 pedaços, portanto deveriam receber 5 e 3 moedas, respectivamente, no entanto, essa divisão que parece certa, está proporcionalmente incorreta. Como o calculista notou o erro, então observou a respeito:

> — Perdão, ó cheique. A divisão, feita desse modo, pode ser muito simples, mas não é matematicamente certa! Se eu dei 5 pães devo receber 7 moedas; o meu companheiro bagdali, que deu 3 pães, deve receber apenas uma moeda.
> — Pelo nome de Maomé! — interveio o vizir Ibrahim, interessado vivamente pelo caso. — Como justificar, ó estrangeiro, tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas? Se contribuíste com 5 pães, por que exiges 7 moedas? Se o teu amigo contribuiu com 3 pães, por que afirmas que ele deve receber uma única moeda?
> O Homem que Calculava aproximou-se do prestigioso ministro e assim falou:

> — Vou provar-vos, ó Vizir, que a divisão das 8 moedas, pela forma por mim proposta, é matematicamente certa. Quando durante a viajem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços, comendo cada um de nós, um desses pedaços. Se eu dei 5 pães, dei é claro, 15 pedaços; se o meu companheiro deu 3 pães, contribuiu com 9 pedaços. Houve, assim, um total de 24 pedaços, cabendo, portanto, 8 pedaços para cada um. Dos 15 pedaços que dei, comi 8; dei na realidade, 7; o meu companheiro deu, como disse, 9 pedaços, e, comeu também, 8; logo, deu apenas 1. Os 7 pedaços que eu dei e que o bagdali forneceu formaram os 8 que couberam ao cheique Salém Nasair. Logo, é justo que eu receba 7 moedas e o meu companheiro, apenas uma. [39]

Utilizando proporção e as observações demonstradas no trecho acima, se Beremiz forneceu a Salém sete, dos oito pedaços de pães, logo ele cedeu uma razão de $\frac{7}{8}$ da quantidade total, e sendo x o número de moedas que o calculista deve receber de um montante de oito moedas, temos:

$$\frac{7}{8} = \frac{x}{8}, \text{ que implica em } x = 7$$

Portando caberia a Beremiz sete moedas do montante, e com isso, bagdali que cedeu um pedaço de pão, receberia somente uma moeda. Esta seria a divisão proporcionalmente correta, mas no final, com toda bondade, Beremiz dividiu igualmente o total com bagdali, cabendo a cada quatro moedas.

Na próxima seção será apresentado o problema dos quatro quatros, contendo o trecho do livro onde o problema é discutido por Beremiz, as operações que podem ser utilizadas e mostrando as resoluções para os valores de 0 a 100.

3.3 Os quatro quatros

Na história, após encerar alguns trabalhos que faziam no palácio do vizir, Beremiz e bagdali resolvem fazer um passeio pelo suque[1] e pelos jardins de Bagdá, onde,

> Interessou-se Beremiz por um elegante e harmonioso turbante azul-claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali (turbantes, caixas, punhais, pulseiras, etc.) era vendido por 4 dinares.
> Havia um letreiro, em letras vistosas, que dizia:

[1]Suque ou suk — Rua ou praça em que se localizavam as tendas, os bazares e as lojas dos mercadores. [39]

“OS QUATRO QUATROS”

> Ao ver Beremiz interessado em adquirir o turbante azul, objetei:
> — Julgo loucura comprar esse luxo. Estamos com pouco dinheiro e ainda não pagamos a hospedaria.
> — Não é o turbante que me interessa — retorquiu Beremiz. — Repare que a tenda desse mercador é intitulada “Os Quatro Quatros”. Há nisso tudo espantosa coincidência digna de atenção.
> — Coincidência? Por quê?
> — Ora bagdali — retorquiu Beremiz —, a legenda que figura nesse quadro recorda uma das maravilhas do Cálculo: podemos formar um número qualquer empregando quatro quatros! [39]

O problema dos quatro quatros consiste em escrever, com quatro quatros e as operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, fatorial e terminal[2]), uma expressão que seja igual a um número inteiro dado.

No livro, Malba Tahan já nos dá as expreções que resultam nos número de 0 a 10, que são as seguintes:

N.º	Solução	N.º	Solução	N.º	Solução
0	$44-44$	4	$4+\frac{4-4}{4}$	8	$4+4+4-4$
1	$\frac{44}{44}$	5	$\frac{4\times 4+4}{4}$	9	$4+4+\frac{4}{4}$
2	$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$	6	$\frac{4+4}{4}+4$	10	$\frac{44-4}{4}$
3	$\frac{4+4+4}{4}$	7	$\frac{44}{4}-4$		

Na tabela a seguir podemos observar as respostas para os números de 11 a 100.

N.º	Solução	N.º	Solução	N.º	Solução
11	$\widehat{4}+4^{4-4}$	41	$4\times\widehat{4}+\left(\frac{4}{4}\right)$	71	$\widehat{(\widehat{4})}+\widehat{4}+\left(\frac{4!}{4}\right)$
12	$\frac{44+4}{4}$	42	$44+\sqrt{4}-4$	72	$\frac{(4!)^{\sqrt{4}}}{4+4}$
13	$4!-\frac{44}{4}$	43	$44-\frac{4}{4}$	73	$\widehat{(\widehat{4})}+4!-\frac{4!}{4}$
14	$4+4+4+\sqrt{4}$	44	$44+4-4$	74	$\frac{4^4}{4}+\widehat{4}$
15	$\frac{44}{4}+4$	45	$44+\frac{4}{4}$	75	$\widehat{(\widehat{4})}+(4\times 4)+4$
16	$(\sqrt{4})^4+4-4$	46	$44-\sqrt{4}+4$	76	$4\times 4!-(\widehat{4}+\widehat{4})$
17	$4!-\frac{4!+4}{4}$	47	$4!+4!-\frac{4}{4}$	77	$\frac{\widehat{(4!)}+4+4}{4}$

[2]O termial de número natural n é denotado por $\widehat{n}$ representa a soma dos números naturais de n até 1.

18	$\frac{4!+4!+4!}{4}$	48	$44+(\sqrt{4})^{(\sqrt{4})}$	78	$44+4!+\widehat{4}$
19	$4!-4-\frac{4}{4}$	49	$4!+4!+\frac{4}{4}$	79	$\widehat{(\widehat{4})}-4+4!+4$
20	$(\widehat{4}+\widehat{4})\times\left(\frac{4}{4}\right)$	50	$44+\sqrt{4}+4$	80	$(4\times 4+4)\times 4$
21	$4!-4+\frac{4}{4}$	51	$\widehat{(\widehat{4})}-\frac{4\times 4}{4}$	81	$\widehat{(\widehat{4})}+(4\times 4)+\widehat{4}$
22	$\frac{44}{4}\times\sqrt{4}$	52	$4!\times 4-44$	82	$4\times 4!-(\widehat{4}+4)$
23	$4!-4^{(4-4)}$	53	$\widehat{(\widehat{4})}-\frac{4+4}{4}$	83	$\frac{\widehat{(4!)}}{4}+4+4$
24	$(\sqrt{4})^{4}+4+4$	54	$\frac{4^{4}}{4}-4$	84	$(4!-4)\times 4+4$
25	$4!+4^{(4-4)}$	55	$\widehat{(\widehat{4})}\times 4^{(4-4)}$	85	$\widehat{(\widehat{4})}+4!+\frac{4!}{4}$
26	$\frac{44}{\sqrt{4}}+4$	56	$4!+4!+4+4$	86	$\widehat{(\widehat{4})}+\widehat{\left(\frac{4!}{4}\right)}+\widehat{4}$
27	$4!+4+\frac{4}{4}$	57	$\widehat{(\widehat{4})}+\frac{4+4}{4}$	87	$4!+\widehat{(\widehat{4})}+4+4$
28	$\left(\frac{4!}{4}\right)\times 4+4$	58	$\widehat{(\widehat{4})}+4-\frac{4}{4}$	88	$44+44$
29	$4!+4+\frac{4}{4}$	59	$\widehat{(\widehat{4})}+\frac{4\times 4}{4}$	89	$\widehat{(\widehat{4})}+44-\widehat{4}$
30	$\frac{4!\times 4+4!}{4}$	60	$4^{\sqrt{4}}\times 4-4$	90	$4\times 4!-\frac{4!}{4}$
31	$\frac{(4+\sqrt{4})!+4}{4!}$	61	$\widehat{\left(\frac{4!}{4}\right)}+4\times\widehat{4}$	91	$\widehat{(\widehat{4})}+4\times(\widehat{4})-4$
32	$4\times 4+4\times 4$	62	$4!+4!+\widehat{4}+4$	92	$44+4!+4!$
33	$(4!+\widehat{4})-(\frac{4}{4})$	63	$\frac{(4^{4}-4)}{4}$	93	$\widehat{(\widehat{4})}+4!+4!-\widehat{4}$
34	$4!+4+4+\sqrt{4}$	64	$4^{4-\sqrt{4}}\times 4$	94	$4\times\widehat{\left(\frac{4!}{4}\right)}+\widehat{4}$
35	$4!+\frac{44}{4}$	65	$\frac{4+4^{4}}{4}$	95	$4!\times 4-\frac{4}{4}$
36	$4!+4+4+4$	66	$\widehat{(\widehat{4})}+\widehat{4}+\frac{4}{4}$	96	$4!\times 4+4-4$
37	$\widehat{(\widehat{4})}-(\widehat{4}+4+4)$	67	$4+4+4+\widehat{(\widehat{4})}$	97	$4!\times 4+\frac{4}{4}$
38	$44-4-\sqrt{4}$	68	$\frac{4^{4}}{4}+4$	98	$\frac{\widehat{(4!)}-4}{4}+4!$
39	$4\times\widehat{4}-\frac{4}{4}$	69	$\widehat{\left(\frac{4!}{4}\right)}+4!+4!$	99	$\widehat{(\widehat{4})}+4\times\widehat{4}+4$
40	$44-(\sqrt{4})^{(\sqrt{4})}$	70	$\frac{(4!+4^{4})}{4}$	100	$(4!+\frac{4}{4})\times 4$

Tabela 3.1: Respostas para os números de 11 a 100
Fonte: [25]

O problema pode ser proposto para os alunos com um desafio ou uma atividade adicional, de maneira a instigá-los a procurar a resposta. Na seção seguinte será abordado os números perfeitos, apresentando o trecho do livro, a definição e alguns resultados sobre o tema.

3.4 Números perfeitos

Não se sabe quando os números perfeitos foram estudados pela primeira vez e, de fato, os primeiros estudos podem remontar aos primeiros tempos, quando os números despertaram a curiosidade. É bastante provável, embora não seja certo, que os egípcios teriam se deparado com tais números naturalmente, dada a forma como seus métodos de cálculo funcionavam. Os números perfeitos foram estudados por Pitágoras e seus seguidores, mais por suas propriedades místicas do que por suas propriedades teóricas dos números.

Definição 3. *Um número natural $n > 1$, é dito perfeito se for igual à soma de seus divisores naturais próprios, que são todos os divisores naturais de n, exceto o próprio n.*

Desta maneira, para averiguar se um número natural $n > 1$ é perfeito, precisamos, primeiramente, encontrar todos os divisores de n, posteriormente somá-los e por fim verificar se a soma obtida é igual a n, se sim, o número é dito como perfeito, se a soma for maior, é abundante e se for menor, deficiente [28].

Mesmo que o estudo de números perfeitos não seja abrangido na educação básica, ele se faz interessante para aulas que envolvam divisibilidade dos números naturais, e até mesmo para reforçar a pártica da divisão.

Cativado a ensinar as propriedades dos números a Telassim, filha do poeta Iezid-Abul-Hamid, Beremiz chega a seu palácio, ficando encantado com sua estrutura e ornamentação. Porém, o primo do poeta Tara-Tir desconfiava do potencial do calculista, e com grosseria propôs um desafio:

> — Responde-me, ó Calculista do Marreco, quantos pássaros estão naquele viveiro? Beremiz Samir cruzou os braços e pôs-se a observar com viva atenção o viveiro indicado.[...]
> Ao cabo de alguns minutos o calculista voltou-se para o generoso Iezid e disse-lhe:
> — Peço-vos, ó Xeque, mandeis imediatamente soltar três daqueles pássaros cativos. Será, desse modo, mais simples e mais agradável para mim anunciar o número total![...]

> Iezid, intrigadíssimo, embora, com o inesperado pedido do calculista, fez vir o encarregado do viveiro e deu prontas ordens para que a solicitação do calculista fosse atendida: libertos da prisão, três lindos colibris voaram rápidos, pelo céu afora.
> — Acham-se agora, neste viveiro — declarou Beremiz em tom pausado —, quatrocentos e noventa e seis pássaros!
> — Admirável! — exclamou Iezid com entusiasmo. — É isso mesmo! Tara-Tir sabia disso! Eu mesmo já o havia informado! A minha coleção era meio milheiro; feito o desconto dos três que agora soltei e de um rouxinol, mandado para Mossul, ficam precisamente 496!
> — Acertou por acaso — regougou, estuante de rancor, o terrível Tara-Tir. O poeta Iezid, instigado pela curiosidade, perguntou a Beremiz:
> — Pode dizer-me, amigo, por que preferiu contar 496, quando era tão simples contar 496 + 3, ou melhor, 499?
> — Posso explicar-vos, ó Xeque, a razão de meu pedido — respondeu Beremiz com altivez. — Os matemáticos procuram sempre dar preferência aos números notáveis e evitar os resultados inexpressivos e vulgares. Ora, entre 499 e 496 não há que hesitar. O número 496 é um número perfeito e deve merecer nossa preferência.
> — E que vem a ser um número perfeito? — perguntou o poeta. — Em que consiste a perfeição de um número? [39]

O número perfeito, 496, apresentado por Beremiz foi o terceiro encontrado, seus divisores naturais são 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248. Os quatro primeiros números perfeitos foram 6, 28, 496 e 8128. Sendo que esses quatro menores números perfeitos já eram conhecidos pelos gregos antigos.

Somente no século XV fora encontrado o quinto número perfeito, 33.550.336. Em 1772, Euler descobriu o número 2.305.843.008.139.952.128, que ficou no posto como maior número perfeito por mais de 100 anos, até que o próximo apareceu em 1883. Os dez menores números perfeitos são os seguintes [28]:

- 6
- 28
- 496
- 8.128
- 33.550.336
- 8.589.869.056
- 137.438.691.328
- 2.305.843.008.139.952.128
- 2.658.455.991.569.831.744.645.692.615.953.842.176
- 191.561.942.608.236.107.294.793.378.084.303.638.130.997.321.548.169.216

Um resultado muito importante sobre os números perfeitos é o Teorema de

Euclides-Euler.

Teorema 1. *Teorema de Euclides-Euler: Um número natural m é um número perfeito par se, e somente se, $m = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$, sendo $2^n - 1$ um número natural primo.*

Como podemos notar, os números perfeitos não são comuns, até o momento somente 49 são conhecidos. O perfeito que ocupa a quadragésima nona posição foi descoberto em janeiro de 2016, contendo impressionantes 44 milhões de dígitos, sendo representado pela expressão $2^{74207280} \times (2^{74207281} - 1)$ [28].

Na próxima seção será apresentado uma das vertentes da história do surgimento do Xadrez e algumas sugestões de como utilizar o jogo como recurso didático.

3.5 Os cálculos dos grãos de trigos das casas do tabuleiro de Xadrez

Esta seção sera dedicada a apresentar o xadrez como recuso didático, explorando o capítulo 16 do livro tema (O Homem que Calculava), onde Malba Tahan conta a história do surgimento do Xadrez, através de seu protagonista, Beremiz. Tal história fala sobre um rei hindu chamado Iadava, que perde seu filho em uma de suas guerras. Se afundando em tristeza, desolado diariamente o rei relembrava..

> As peripécias da batalha em que pereceu o príncipe Adjamir não lhe saíam do pensamento. O infeliz monarca passava longas horas traçando, sobre uma grande caixa de areia, as diversas manobras executadas pelas tropas durante o assalto. Com um sulco indicava a marcha da infantaria; ao lado, paralelo ao primeiro, outro traço mostrava o avanço dos elefantes de guerra; um pouco mais abaixo, representada por pequenos círculos dispostos em simetria, perfilava a destemida cavalaria chefiada por um velho radj que se dizia sob a proteção de Techandra, a deusa da Lua. Ainda por meio de gráficos esboçava o rei a posição das colunas inimigas desvantajosamente colocadas, graças à sua estratégia, no campo em que se feriu a batalha decisiva. [39]

Até que certo dia, um jovem, pobre e modesto, solicita uma audiência com o rei que vinha pleiteando havia há algum tempo, sem dizer inicialmente quais eram os motivos ou intenções que o fizeram procurar o rei. Como, nesse dia, o monarca se sentia com boa disposição, solicitou que trouxessem o desconhecido rapaz à sua presença.

Conduzido à grande sala do trono, foi o brâmane interpelado, conforme as exigências da praxe, por um dos vizires do rei.
— Quem és, de onde vens e que desejas daquele que, pela vontade de Vichnu, é rei e senhor de Taligana?
— Meu nome — respondeu o jovem brâmane — é Lahur Sessa e venho da aldeia de Namir, que trinta dias de marcha separam desta bela cidade. Ao recanto em que eu vivia chegou a notícia de que o nosso bondoso rei arrastava os dias em meio de profunda tristeza, amargurado pela ausência de um filho que a guerra viera roubar-lhe. Grande mal será para o país, pensei, se o nosso dedicado soberano se enclausurar, como um brâmane cego, dentro de sua própria dor. Deliberei, pois, inventar um jogo que pudesse distraí-lo e abrir em seu coração as portas de novas alegrias. É esse o desvalioso presente que desejo neste momento oferecer ao nosso rei Iadava.
Como todos os grandes príncipes citados nesta ou naquela página da História, tinha o soberano hindu o grave defeito de ser excessivamente curioso. Quando o informaram da prenda de que o moço brâmane era portador, não pôde conter o desejo de vê-la e apreciá-la sem mais demora.
O que Sessa trazia ao rei Iadava consistia num grande tabuleiro quadrado, dividido em sessenta e quatro quadradinhos, ou casas, iguais; sobre esse tabuleiro colocavam-se, não arbitrariamente, duas coleções de peças que se distinguiam, uma da outra, pelas cores branca e preta, repetindo, porém, simetricamente, os engenhosos formatos e subordinados a curiosas regras que lhes permitiam movimentar-se por vários modos.
Sessa explicou pacientemente ao rei, aos vizires e cortesãos que rodeavam o monarca em que consistia o jogo, ensinando-lhes as regras essenciais:
— Cada um dos partidos dispõe de oito peças pequeninas — os peões. Representam a infantaria, que ameaça avançar sobre o inimigo para desbaratá-lo. Secundando a ação dos peões vêm os elefantes de guerra, representados por peças maiores e mais poderosas; a cavalaria, indispensável no combate, aparece, igualmente, no jogo, simbolizada por duas peças que podem saltar, como dois corcéis, sobre as outras; e, para intensificar o ataque, incluem-se — para representar os guerreiros cheios de nobreza e prestígio — os dois vizires do rei. Outra peça, dotada de amplos movimentos, mais eficiente e poderosa do que as demais, representará o espírito de nacionalidade do povo e será chamada a rainha. Completa a coleção uma peça que isolada pouco vale, mas se torna muito forte quando amparada pelas outras. É o rei.
O rei Iadava, interessado pelas regras do jogo, não se cansava de interrogar o inventor:
— E por que é a rainha mais forte e mais poderosa que o próprio rei?
— É mais poderosa — argumentou Sessa — porque a rainha representa, nesse jogo, o patriotismo do povo. A maior força do trono reside, principalmente, na exaltação de seus súditos. Como poderia o rei resistir ao ataque dos adversários, se não contasse com o espírito de abnegação e sacrifício daqueles que o cercam e zelam pela integridade da pátria? [39]

Hoje, conhecemos os elefantes de guerra como as duas tores, os dois vizires do rei são os bispos e as demais peças continuam com o mesmo nome. A descrição de todas as peças de acordo com nome, posicionamento e movimentos pode ser vista na subseção

3.5.1.

O monarca, Iadava, rapidamente aprendeu as regras do jogo e já estava derrotando com facilidade seus vizires. O rei notou que em algumas partidas as disposições das peças no tabuleiro se assemelhavam com suas tropas na guerra que levará seu filho e que, no jogo, muitas vezes, o sacrifício de uma peça é fator fundamental que condiciona a vitória. Então, maravilhado com a grandiosa e engenhosa invenção do jovem rapaz, o rei então decide recompensá-lo:

> — Quero recompensar-te, meu amigo, por este maravilhoso presente, que de tanto me serviu para alívio de velhas angústias. Dize-me, pois, o que desejas, para que eu possa, mais uma vez, demonstrar o quanto sou grato àqueles que se mostram dignos de recompensa. [...]
> — Rei poderoso! — redargüiu o jovem com doçura e altivez. — Não desejo, pelo presente que hoje vos trouxe, outra recompensa além da satisfação de ter proporcionado ao senhor de Taligana um passatempo agradável que lhe vem aligeirar as horas dantes alongadas por acabrunhante melancolia. Já estou, portanto, sobejamente aquinhoado e outra qualquer paga seria excessiva.
> Sorriu, desdenhosamente, o bom soberano ao ouvir aquela resposta que refletia um desinteresse tão raro entre os ambiciosos hindus. E, não crendo na sinceridade das palavras de Sessa, insistiu:
> — Causa-me assombro tanto desdém e desamor aos bens materiais, ó jovem! A modéstia, quando excessiva, é como o vento que apaga o archote cegando o viandante nas trevas de uma noite interminável. Para que possa o homem vencer os múltiplos obstáculos que se lhe deparam na vida, precisa ter o espírito preso às raízes de uma ambição que o impulsione a um ideal qualquer. Exijo, portanto, que escolhas, sem mais demora, uma recompensa digna de tua valiosa oferta. Queres uma bolsa cheia de ouro? Desejas uma arca repleta de joias? Já pensaste em possuir um palácio? Almejas a administração de uma província? Aguardo a tua resposta, por isso que à minha promessa está ligada a minha palavra!
> — Recusar o vosso oferecimento depois de vossas últimas palavras — acudiu Sessa — seria menos descortesia do que desobediência ao rei. Vou, pois, aceitar, pelo jogo que inventei, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo.
> — Grãos de trigo? — estranhou o rei, sem ocultar o espanto que lhe causava semelhante proposta. — Como poderei pagar-te com tão insignificante moeda?
> — Nada mais simples — elucidou Sessa. — Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. Peço-vos, ó Rei, de acordo com a vossa magnânima oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei!

> Não só o rei como os vizires e venerandos brâmanes presentes riram-se, estrepitosamente, ao ouvir a estranha solicitação do jovem. A desambição que ditara aquele pedido era, na verdade, de causar assombro a quem menos apego tivesse aos lucros materiais da vida. O moço brâmane, que bem poderia obter do rei um palácio em uma província, contentava-se com grãos de trigo! [39]

Afinal, qual seria a quantidade de trigo final? Será que tal quantidade valia as risadas do rei? Para chegar nesse valor, ou em uma representação dele, precisamos estudar a proposta de Sessa que consistia em dar-lhe uma quantidade de trigo para cada casa do tabuleiro do jogo, respeitando um padrão, sendo uma unidade de trigo para a primeira, duas para a segunda, quatro para a terceira e assim sempre dobrando a quantidade da casa anterior até chegar na sessenta e quatro, desta maneira, o montante final seria a soma das quantidades recebidas por cada casa.

Note, então, que na proposta temos a sequência numérica $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^{63})$, onde cada um de seus elementos é resultado do produto anterior por dois, com isso, essa sequência representa uma Progressão Geométrica.

Definição 4. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica, onde cada um de seus termos é resultado do produto do termo anterior por uma constante chamada de razão.*

Seja uma PG genéria e finita, $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$*, de razão* q*, temos:*

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 \times q$

$a_3 = a_2 \times q = a_1 \times q \times q = a_1 \times q^2$

$a_4 = a_3 \times q = a_2 \times q^2 \times q = a_1 \times q^3$

$\quad\vdots$

$a_n = a_1 \times q^{n-1}$*, que é o termo geral da PG.*

Definição 5. *A soma de uma PG é dada pela adição de seu termos, ou seja*

$$S(n) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

utilizando o termo geral:

$$S(n) = a_1 + a_1 \times q + a_1 \times q^2 + a_1 \times q^3 + \cdots + a_1 \times q^{n-1} \tag{3.1}$$

multiplicando ambos os lados da equação por q, temos:

$$S(n) \times q = a_1 \times q + a_1 \times q^2 + a_1 \times q^3 + a_1 \times q^4 + \cdots + a_1 \times q^{n-1} + a_1 \times q^n \tag{3.2}$$

fazendo a subtração da expressão em (3.2) com relação a expressão (3.1) temos:

$$S(n) \times q - S(n) = a_1 \times q^n - a_1$$

tirando $S(n)$ e a_1 em evidência, temos:

$$S(n) \times (q-1) = a_1 \times (q^n - 1)$$

dividindo tudo por $(q-1)$, chegaremos a equação da soma de uma PG finita:

$$S(n) = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \tag{3.3}$$

Ou seja, conseguimos calcular a soma de uma PG sabendo, somente, o número de termos, o primeiro termo e a razão, sem necessidade de conhecer o valor do último termo.

Com isso, agora, podemos calcular a quantidade de grãos de trigo que Sessa deverá receber. Como o tabuleiro contem 64 casas, então $n = 64$, e utilizando a sequência, $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots, a_{64})$, temos que $a_1 = 1$ e a razão $q = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$.

Substituindo em (3.3), temos:

$$S(64) = \frac{1 \times (2^{64} - 1)}{2 - 1}$$

$$S(64) = (2^{64} - 1)$$

$$S(64) = 18.446.744.073.709.551.616 - 1$$

$$S(64) = 18.446.744.073.709.551.615 \text{ grãos de trigo.}$$

Ainda não tem a real dimensão desse número? Vejamos o seguinte então, a cultivar BRS 254 produzida pela Embrapa, em sua melhor amostra produziu 10.150 grãos por metro quadrado, dados encontrados na Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e

Ambiental de 2011 [3]. Fazendo:

$$\frac{18.446.744.073.709.551.615 \quad grãos}{10150 \quad \frac{grãos}{m^2}} = 1.817.413.209.232.468,1394 \quad m^2$$

os seja, seria necessário cerca de 1,817 quatrilhões de metros quadrados de plantio dessa variedade, que equivalem a 181.741.320.923,2468 hectares[3].

Se ainda não conseguiu visualizar a dimensão desse número, para colher essa quantidade de trigo, da cultivar BRS 254, é necessário realizar o plantio em uma área equivalente a 220.292.510.209,9961 campos de futebol oficiais[4].

Como utilizamos os dados de uma cultivar atual, que passou por melhoramentos e que foi cultivada com as tecnologias atuais, certamente a área de cultivo para o rei produzir aquela quantidade de grãos seria muito maior, devido, logicamente, a tecnologia da época.

O Rei aceitou a proposta de Sessa, mesmo sem ter conhecimento do quão grande era o número de grãos que deveria pagar, achava ele, em suas palavras, que com duas ou três medidas de trigo, ou punhados, pagaria folgadamente, dizendo também que o pedido do garoto era ridículo e sem ambição, assim:

> Mandou o rei chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia.
> Os sábios calculistas, ao cabo de algumas horas de acurados estudos, voltaram ao salão para submeter ao rei o resultado completo de seus cálculos.
> Perguntou-lhes o rei, interrompendo a partida que então jogava:
> — Com quantos grãos de trigo poderei, afinal, desobrigar-me da promessa que fiz ao jovem Sessa?
> — Rei magnânimo! — declarou o mais sábio dos matemáticos. — Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento pedido por Sessa, e obtivemos um número cuja grandeza é inconcebível para a imaginação humana. Avaliamos, em seguida, com o maior rigor, a quantas ceiras corresponderia esse número total de grãos, e chegamos à seguinte conclusão: a porção de trigo que deve ser dada a Lahur Sessa equivale a uma montanha que, tendo por base a cidade de Taligana, seria cem vezes mais alta do que o Himalaia! A Índia inteira, semeados todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria em dois mil séculos a quantidade de trigo que, pela vossa promessa, cabe, em pleno direito, ao jovem Sessa! [39]

O Rei Iadava e seus vizires ficaram muito surpresos e até assombrados com ta-

[3]Um hectar equivale a 10.000 m^2

[4]Um campo de futebol oficial tem 8.250m^2

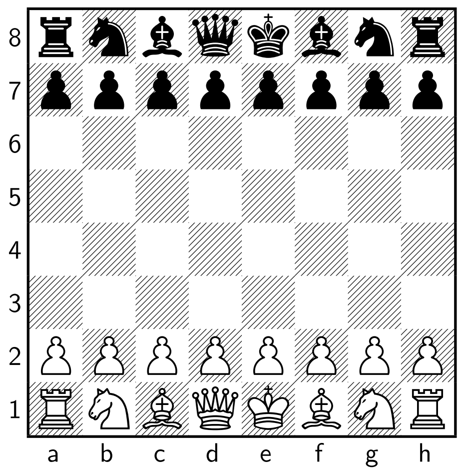
manha dívida que havia se sujeitado e se viu pela primeira vez com a impossibilidade de cumprir a sua palavra. Como o jovem Sessa só pretendia dar uma lição para o rei, declarou prontamente que abriria mão do pedido e se dirigiu ao rei dizendo:

> [...] os homens mais avisados iludem-se, não só diante da aparência enganadora dos números, mas também com a falsa modéstia dos ambiciosos. Infeliz daquele que toma sobre os ombros o compromisso de uma dívida cuja grandeza não pode avaliar com a tábua de cálculo de sua própria argúcia. Mais avisado é o que muito pondera e pouco promete![...]
> — Menos aprendemos com a ciência vã dos brâmanes do que com a experiência direta da vida e das suas lições de todo dia, a toda hora desdenhadas! O homem que mais vive mais sujeito está às inquietações morais, mesmo que não as queira. Achar-se-á ora triste, ora alegre; hoje fervoroso, amanhã tíbio; já ativo, já preguiçoso; a compostura alternará com a leviandade. Só o verdadeiro sábio, instruído nas regras espirituais, se eleva acima dessas vicissitudes, paira por sobre todas essas alternativas! [39].

Após sabiás palavras, o rei nomeou o jovem Sessa como seu primeiro vizir, que contribuiu muito com o desenvolvimento do reino e de sua população.

3.5.1 O uso do Xadrez como recurso didático

Nesta subseção será apresentado algumas ideias de como utilizar o xadrez como recurso didático, de modo a contribuir com a seção em relação ao tema. Primeiramente apresentando o jogo, suas peças, movimentos e as regras básicas, não nos prendendo muito, e depois pontuando algumas sugestões. O tabuleiro do xadrez, com o posicionamento inicial de suas peças, pode ser visto abaixo.



O objetivo do jogo é efetuar um Xeque Mate no Rei adversário, que significa atacá-lo diretamente com uma peça, na qual o oponente não tenha como opção: movimentar o Rei para uma casa que esteja protegida; colocar uma peça entre o Rei e a peça que está atacando; ou capturar a peça que está atacando.

Agora será feito a descrição das peças do xadrez, de acordo com seu posicionamento, nomes e movimentos.

♙♟

Peões: Cada exército conta com oito peões, os brancos são posicionados na horizontal 2 e os pretos na 7. O peão é a única peça que não retrocede no tabuleiro, avançando contra o exército inimigo na vertical, uma casa para cada movimento, somente em seu primeiro movimento pode-se avançar duas casas. Sua captura é realizada na diagonal, ou seja, cada peão ataca ou defende até duas casas, como pode ser observado na figura 3.2 abaixo, onde $\bullet$ representa o local do possível próximo movimento, e $\triangle$ os locais de ataque ou defesa.

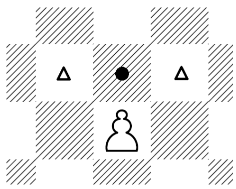


Figura 3.2: Possíveis ações do peão
Fonte: Produção do Autor

Uma situação que pode ocorrer em uma partida é quando dois peões inimigos avançam até se encontrar frente a frente, assim não podendo mais avançar, neste caso os peões ficam trancados, necessitando da intervenção de outra peça para continuar. Quando um peão atravessa completamente o tabuleiro, alcançando a última horizontal (8 para as brancas ou 1 para as pretas), o jogador deve promovê-lo a outra peça de sua escolha, exceto o Rei. Credita-se a cada peão 1 ponto.

♖♜

Torres: Cada exército conta com duas torres, que são posicionadas, simetricamente, nas verticais a e h, sendo que as brancas na horizontal 1 e as pretas na 8. Seu movimento é ortogonal, ou seja, é horizontal ou vertical, movendo-se quantas casas desocupadas desejar, somente em um sentido, ocupando a casa de uma peça inimiga no caso de captura, como pode ser observado na figura 3.3 abaixo. Como a Torre tem um poder grande durante a partida, credita-se a ela 5 pontos.

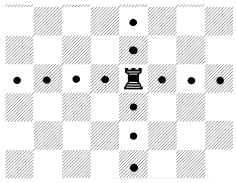


Figura 3.3: Possíveis movimentos da torre
Fonte: Produção do Autor

♘♞

Cavalos: Cada exército conta com dois cavalos, que são posicionadas, simetricamente, nas verticais b e g, sendo que os brancos na horizontal 1 e os pretos na 8. Seu movimento é em formato de L, avançando ou retrocedendo duas casas na vertical e uma horizontal, ou duas casas na horizontal e uma vertical, como pode ser observado na figura 3.4 abaixo. O cavalo é a única peça que pode saltar sobre as outras peças, capturando as peças inimigas na casa de chegada. Pela sua importância, credita-se ao cavalo 3 pontos.

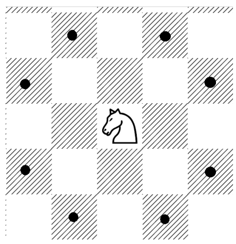


Figura 3.4: Possíveis movimentos do cavalo
Fonte: Produção do Autor

♗♝

Bispos: Cada exército conta com dois bispos, que são posicionadas, simetricamente, nas verticais c e f, sendo os brancos na horizontal 1 e os pretos na 8. Seu movimento é sempre pelas diagonais, avançando ou retrocedendo quantas casas desocupadas o jogador desejar, somente em um sentido, ocupando a casa de uma peça inimiga no caso de captura, como pode ser observado na figura 3.5 abaixo. Cada exército conta com um bispo que anda pelas casas brancas, e um pelas casas pretas. Dado sua importância, credita-se ao bispo 3 pontos.

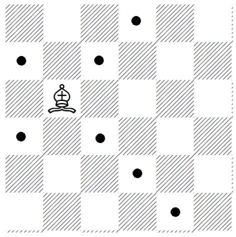


Figura 3.5: Possíveis movimentos do bispo
Fonte: Produção do Autor

♕♛

Rainha: Cada exército conta com uma rainha, que são posicionadas na vertical d, sendo a branca na horizontal 1 e a preta na 8. Seu movimento é a junção dos movimentos das torres e bispos, ou seja, é realizado nas diagonais, verticais ou horizontais, como pode ser observado na figura 3.6 abaixo. A Rainha é uma das peças mais importantes do jogo pela quantidade de movimentos que ela pode efetuar, com isso, credita-se a ela 9 pontos.

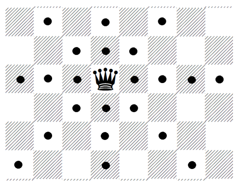


Figura 3.6: Possíveis movimentos da rainha
Fonte: Produção do Autor

♔♚

Rei: Cada exército conta com um rei, que são posicionados na vertical e, sendo o branco na horizontal 1 e o preto na 8. Seu movimento é igual ao da rainha, porém, o rei só pode avançar ou retroceder uma única casa adjacente a ele, como pode ser observado na figura 3.7 abaixo. Em seu movimento o rei não pode se colocar em xeque, ou seja, ocupar uma casa atacada por uma peça inimiga. Não se credita valor ao rei, visto que quando capturado a partida termina.

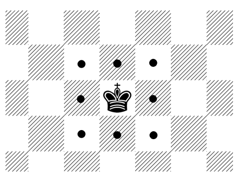


Figura 3.7: Possíveis movimentos do rei
Fonte: Produção do Autor

Se for de interesse do leitor, pesquise sobre os movimentos extraordinários, como o Roque, realizado entre torre e rei, e a *en passant*, situação de captura que ocorre entre peões adversários.

O Xadrez pode ser uma ferramenta muito poderosa para o professor de matemática, que pode auxiliá-lo na criação de situações problema e de atividades diferenciadas envolvendo o tabuleiro, suas peças e seus respectivos movimentos, assim desenvolvendo no aluno diversas habilidades.

> Dentre as habilidades que podem ser desenvolvidas pelo hábito da prática de xadrez destacam-se: a concentração, atenção, paciência, análise e síntese, imaginação, criatividade, organização nos estudos, entre outras. [38]

Em sala de aula observamos que alguns alunos apresentam dificuldade na interpretação de um exercício ou atividade e,

> Grande parte do fracasso escolar em matemática deve-se a incompreensão de uma situação problema. Como transformar em linguagem matemática um enunciado e aplicar os conhecimentos de álgebra, geometria e aritmética como ferramentas na busca de uma solução?
> O xadrez podemos dizer que é um grande problema a ser resolvido. O enunciado é o seguinte: "Temos um exército branco e outro preto. Cada qual com 32 peças com seus movimentos e particularidades. Como dar xeque-mate no rei adversário?" Este é o problema central do xadrez e o desenvolvimento, o desenrolar do jogo dirige-se única e exclusivamente para este fim. Os jogadores elaboram planos, estratégias e metas a serem alcançadas para no fim conquistarem o seu objetivo maior: xeque-mate no rei adversário.
> Se alunos conseguem visualizar estes planos e estratégias, o jogo de xadrez pode e deve oferecer os passos para a solução de situações problemas do dia-a-dia utilizando os conceitos matemáticos para resolvê-los. [24]

Utilizando o Xadrez nas aulas o professor de matemática pode criar diversas situações problemas envolvendo o tabuleiro, as suas peças e sua organização no tabuleiro, por exemplo:

- Potenciação e Progressão Geométrica : pode-se utilizar o exemplo apresentado anteriormente, sobre os grãos de trigo;
- Simetria: referir-se ao posicionamento das peças antes de iniciar uma partida, observe o tabuleiro do xadrez no início da subseção;
- Plano cartesiano: pelo posicionamento de uma peça no tabuleiro, por exemplo, se o peão estiver na casa $f5$, indica que ele está na vertical f (abscissa) e na horizontal 4 (ordenada).

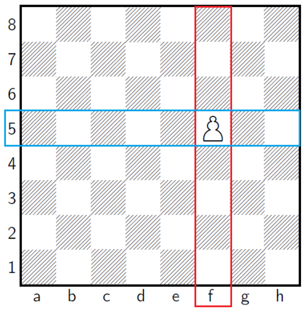


Figura 3.8: Exemplo de plano cartesiano
Fonte: Produção do Autor

- Frações: Em uma partida que ainda não iniciou, pode-se perguntar qual é a fração que cada exército ocupa em relação a todas as casas do tabuleiro. Em uma partida em andamento, pode-se repetir a pergunta e acrescentar a fração de casas que cada exército esta atacando ou protegendo, sem contar as casas ocupadas. Sobre esse último ponto, observe a figura 3.9, onde $\circ$ refere-se as casas atacadas pelo exército branco e $\bullet$ pelo preto.

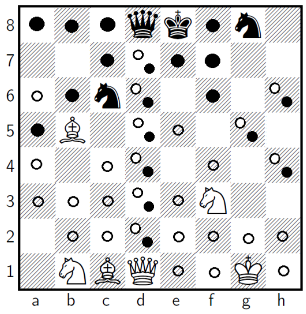


Figura 3.9: Exemplo de frações
Fonte: Produção do Autor

  Observamos que ainda existem um total de 10 peças, contando os dois exércitos, assim conta-se 54 casas desocupadas. Pela imagem dada nota-se que as peças brancas estão atacando 27 casas, enquanto as pretas somente 19. Desta maneira, a fração das brancas será $\dfrac{27}{54} = \dfrac{1}{2}$ e das pretas $\dfrac{19}{54}$. Observe, também, que algumas casas atacadas pelo cavalo preto, posicionado em $c6$ (vertical c e horizontal 6), não foram contadas, pois, o mesmo encontra-se trancado, visto que movimentando-o colocaria o rei em situação de xeque;

- Adição: cada peça tem um valor numérico, a rainha vale 9 pontos, torres valem 5, cavalos e bispos 3 e o peão somente 1 ponto, como isso, em uma partida em andamento, pergunta-se qual a quantidade de pontos capturados por cada exército, exemplo dado na atividade 4 do próximo capítulo;

- Horizontal, Vertical e Diagonal: pelo movimento das peças, explicado e ilustrado acima;

- Noção de Ponto, Reta, Diagonais e Plano: ponto seriam as casas, as retas e diagonais são formadas pelo movimento das peças e o plano é o tabuleiro;

- Perímetros: explorando o tabuleiro, que é um quadrado, podemos designar C para a medida do lado de uma casa como uma variável, visto que o jogo é produzido de diversos tamanhos. O tabuleto contem 8 linhas e 8 colunas, dando um total de 64 casas de lado C, que também são quadradas, como pode ser observado na figura 3.10 abaixo.

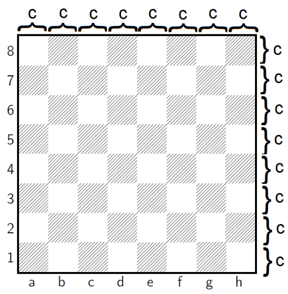


Figura 3.10: Exemplo de perimetro
Fonte: Produção do Autor

Note que o lado do tabuleiro é igual a $8C$, e sabendo que o perímetro é dado pela soma dos lados, logo $8C + 8C + 8C + 8C = 32C$ será o perímetro do tabuleiro com casas de lado C. Em sala de aula utilize uma régua para medir o lado da casa e solicite, aos alunos, que encontrem o perímetro do tabuleiro. Essa ideia pode ser explorada ainda mais calculando a diagonal do tabuleiro e casas, e a distância percorrida por uma peça em um jogo já em andamento;

- Áreas: utilizando a ideia do *item* anterior, das casas de lado C, temos que a área de uma casa será $C \times C = C^2$. Com isso podemos designar uma peça e perguntar ao aluno qual é a área de ataque ou defesa da peça, observe a figura 3.11.

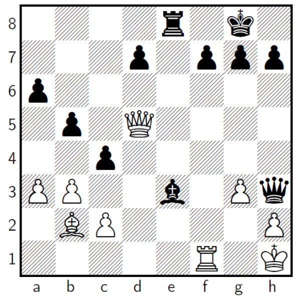


Figura 3.11: Exemplo de áreas
Fonte: Produção do Autor

Escolhendo a rainha branca, posicionada em $d5$, observemos que ela esta atacando as casas $a8$, $b7$, $b5$, $c6$, $c5$, $c4$, $d7$, $d6$, $d4$, $d3$, $d2$, $d1$, $e6$, $e5$, $e4$, $f7$, $f5$, $f3$, $g5$, $g2$ e $h5$, totalizando 21 casas atacadas, desta maneira a área de ataque da rainha branca é $(21 \times C^2)$.

Capítulo 4

Sugestões de Atividades

Neste Capítulo serão apresentadas dez sugestões de atividades com suas resoluções, referente as obras que foram citadas nos capítulos anteriores e os livros: "Alice no País dos Enigmas" 1 e 2 e "Matemática Divertida e Curiosa", podendo ser utilizadas pelo(a) professor(a) como questões problema, enigmas ou charadas para referir-se a algum conteúdo programático.

Na prática docente, após serem feitas as atribuições de disciplinas é comum professores e alunos receberem um material guia da disciplina, que pode ser um livro didático ou um apostilado, de acordo com a entidade responsável pela educação. Com este material o professor prepara as suas aulas, ou seja, produz o seu próprio material didático moldando-o no seu jeito de ministrar aula, baseando-se no que fora fornecido e também buscando complementos em outras bibliografias para melhorar a sua prática e facilitar o entendimento dos alunos.

Com isso exponho a seguir sugestões de atividades baseadas nas obras citadas e em seus personagens, de modo a sugerir um método de apresentar um conteúdo ou um assunto para os alunos.

4.1 Atividade 1: O Problema do Fuso Horário

Em 1857, Carroll começa a se preocupar ainda mais com a verificação do tempo e como ele era tratado pelos cavaleiros ingleses, dado que ainda não havia sido adotado o fuso de Greenwich, então Carroll buscava respostas para a pergunta "Onde o dia nasce?", assim lançou, à época, o seguinte desafio: Qual dentre dois relógios está mais preciso: um que atrasa um minuto por dia ou outro que está parado? [26]

No capítulo 7 (Um chá maluco), este descaso com o tempo aparece quando Alice faz comentários sobre o relógio do Chapeleiro Maluco, que apontava os dias, mas não as horas.

> - Que relógio mais engraçado! – observou a menina. – ele mostra o dia do mês e não mostra a hora! - E por que deveria? - replicou o chapeleiro. – Por acaso o seu relógio mostra o ano? [7]

Para a resposta do problema, observamos a tabela do relógio que atrasa um minuto por dia:

Dias	Minutos
1	1
2	2
30	30 $\rightarrow$ meia hora
60	60 $\rightarrow$ uma hora

Tabela 4.1: Fuso horário

Portanto, a cada 60 dias o relógio atrasa uma hora e para voltar a marcar o horário certo é aceitável que o relógio atrase doze horas, assim 60 dias vezes 12 é igual a 720 dias, então o relógio que atrasa um minuto por dia, apontara a hora certa após 720 dias. Já o relógio parado dará duas vezes por dia o horário certo, na posição em que seus ponteiros pararam.

4.2 Atividade 2: Os Quatro Quatros

Já mencionado na seção 3.3, retirado do livro "O Homem que Calculava", este problema pode ser inserido como atividade diagnóstica, ou como questão extra, de modo a estimular o raciocínio dos alunos e para reforçar as operações básicas.

Para o fundamental I apresente o problema contendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, no fundamental II acrescente potenciação e radiciação. Pode-se introduzir o problema mostrando a resposta dos primeiros valores e posteriormente pedindo a resposta dos outros. Por exemplo, demonstre para os alunos as expressões que resultem nos números 0, 1 e 2, e depois atribua a eles as expressões dos números de 3 a 10.

Para o Ensino Médio acrescente as operações fatorial e terminal ao problema, demonstre alguns valores para os alunos terem conhecimento das operações, por exemplo:

$$\text{para o fatorial: } 4! - \frac{44}{4} = 13$$
$$\text{para o terminal: } \widehat{(4)} - \frac{4 \times 4}{4} = 51$$

e posteriormente atribua aos alunos outros valores.

4.3 Atividade 3: Colheita de Rosas

Retirada do Livro de R. W. Galland, Alice no País dos Enigmas 1, é uma atividade que pode ser utilizada em aulas de equações polinomiais do primeiro grau e também em sistemas de equações polinomiais do primeiro grau. A charada é narrada da seguinte maneira:

Colheita de Rosas

> "TRAGA-ME UMA ROSA e eu te conto outra história", disse a Duquesa. "Oh, não! Mais lições!", pensou Alice. De qualquer forma, ela se dirigiu aos jardins. Três jardineiros estavam tomando conta das roseiras. "Levar rosas do jardim é uma ofensa muito grave", disse o primeiro jardineiro. "Mas não diremos a Rainha se você pagar antes de sair", disse o segundo. "Metade das rosas que você tem, mais duas", acrescentou o terceiro. Ela deixou o jardim com apenas uma rosa, como foi instruída. Mas quantas ela colheu da primeira vez? [15]

Reformulando a pregunta: quantas rosas (Alice) havia colhido antes de chegar no primeiro jardineiro? Lembrando que Alice passa por 3 jardineiros.

Primeiramente devemos equacionar o problema, sabemos que ao passar por cada um dos três jardineiros ela pagou metade das rosas que ela tinha mais duas e que no final ela sobrou com uma rosa. Observe também, que a quantidade de rosas que ela tem antes de pagar o segundo jardineiro é igual a quantidade que ela tinha após pagar o primeiro jardineiro.

Então seja Q_1 a quantidade de rosas que ela tinha antes de pagar um certo jardineiro e Q_2 a quantidade rosas que ela tem após pagar um certo jardineiro, com isso temos:

$$\frac{Q_1}{2} = Q_2 + 2$$
$$Q_1 = (Q_2 + 2) \times 2$$

Vamos exprimir essas quantidades para cada jardineiro da seguinte maneira:

- Jardineiro 1: ela chegou com x rosas e saiu com y rosas;

- Jardineiro 2: ela chegou com y rosas e saiu com z rosas;
- Jardineiro 3: ela chegou com z rosas e saiu com 1 rosa;

Substituindo as incógnitas na equação temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = (y+2) \times 2 \\ y = (z+2) \times 2 \\ z = (1+2) \times 2 \end{cases}$$

Agora resolveremos o sistema começando pela terceira equação, e substituindo o valor encontrado na segunda e por fim na primeira equação.

No jardineiro 3 ela chegou com:

$$z = (1+2) \times 2$$

$$z = 3 \times 2$$

$$z = 6 \text{ rosas;}$$

No jardineiro 2 ela chegou com:

$$y = (6+2) \times 2$$

$$y = 8 \times 2$$

$$y = 16 \text{ rosas;}$$

No jardineiro 1 ela chegou com:

$$x = (16+2) \times 2$$

$$x = 18 \times 2$$

$$x = 36 \text{ rosas.}$$

Portanto, ela havia colhido 36 rosas na primeira vez.

4.4 Atividade 4: Jogo de Xadrez

Retirada do Livro de R. W. Galland, "Alice no País dos Enigmas 2", é uma situação problema que reforça a atenção do aluno, a interpretação de texto, a adição dos números naturais e que também pode estimular a prática do xadrez, que tem muito a oferecer para o seu desenvolvimento em matemática e social. O desafio é narrado da seguinte maneira:

> Jogo de Xadrez
>
> O cavaleiro vermelho capturou três peões brancos antes de ser levado pela torre, que por sua vez foi capturada pela Rainha Vermelha. Sua Majestade continuou para capturar outro peão e um bispo antes de ser capturada pela Rainha Branca.
> Se o jogo acabasse neste momento, qual lado poderia reivindicar a vitória? [16]

Sabendo que as peças têm um valor padrão, como se segue: peões valem um ponto cada; cavaleiros e bispos três pontos cada; torres cinco pontos cada e a rainha vale nove pontos. O Rei não tem valor definido, obviamente, pois ao ser capturado o jogo acaba.

De acordo com esses valores, veja na tabela seguinte a quantidade de pontos capturados pelas peças vermelhas e brancas.

Vermelho Capturou	Branco Capturou
3 peões = 3 pontos	1 cavaleiro = 3 pontos
1 torre = 5 pontos	1 Rainha = 9 pontos
1 peão = 1 ponto	—
1 bispo = 3 pontos	—
Total = 12 pontos Capturados	Total = 12 pontos Capturados

Tabela 4.2: Pontos capturados na partida
Fonte: Produção do autor.

Como os exércitos vermelhos e brancos capturaram a mesma quantidade de pontos, independentemente do número de peças capturadas e do desenvolvimento das peças restantes no tabuleiro, o jogo deveria ser considerado como empate, pois cada um deles somou 12 pontos.

4.5 Atividade 5: O Problema das Árvores

Retirado do Livro de Malba Tahan, "Matemática Divertida e Curiosa", é um problema que pode ser inserido na introdução das aulas de Geometria Plana, pois ajuda a trabalhar a divisão de áreas e do números naturais.

O problema consiste em um terreno de forma quadrada, onde o proprietário ergueu uma casa. Nesse terreno existem 15 árvores plantadas seguindo uma disposição regular, ou seja, com o mesmo espaçamento, como pode ser observado na imagem, onde a casa está construída na parte hachurada e as árvores estão representadas por círculos. [40]

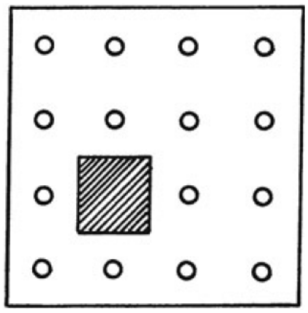


Figura 4.1: Problema das árvores
Fonte: [40]

Deve-se dividir o terreno em 5 partes iguais em forma e em grandeza, ou seja, cada uma das 5 partes deve ter o mesmo formato e a mesma área, de modo que contenham também o mesmo número de árvores. [40]

Inicialmente deve-se dividir a quantidade total de árvores por 5, ou seja, cada parte terá $\frac{15}{5} = 3$ árvores. A resposta é mostrada na seguinte imagem:

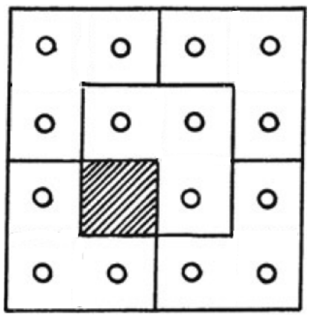


Figura 4.2: Resposta do problema das árvores
Fonte: [40]

Podemos remodelar o problema retirando a palavra "forma", aliás, sugiro que apresente o problema desta maneira inicialmente, pois ao excluir esta palavra os alunos deveram dividir o terreno em 5 partes iguais em grandeza, não precisando se atentar para o formato.

Possíveis respostas que poderão aparecer:

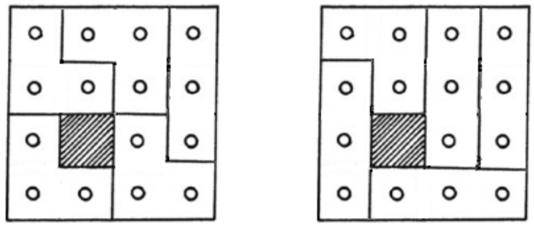


Figura 4.3: Respostas alternativas para o problema das árvores
Fonte: Produção do Autor

4.6 Atividade 6: Um Problema Difícil

Retirado do Livro de R. W. Galland, "Alice no País dos Enigmas"2, é um enigma que pode ser apresentado nas aulas de Matrizes quadradas, para facilitar a visualização das linhas, colunas, diagonais e a posição de seus elementos. A charada é narrada da seguinte maneira:

Um Problema Difícil

> "Isto nunca vai dar certo!", gritou a Rainha. "Esses ramos devem ficar em fileiras. Por que você acha que são chamados de roseiras?" Como sempre, os jardineiros puseram suas mãos em seus pescoços antecipando assim o castigo da Rainha. "Eu os quero replantados em oito fileiras com três ramos cada!", ordenou a Rainha. "Caso contrário..." Os jardineiros tremeram. Havia apenas nove roseiras. Eles obedeceram à ordem da Rainha ou vão perder suas cabeças? [16]

Sugira para os aulos que façam um desenho para responder e estimule o raciocínio dos mesmos de modo a facilitar o seu entendimento do problema. A resposta do problema é a seguinte:

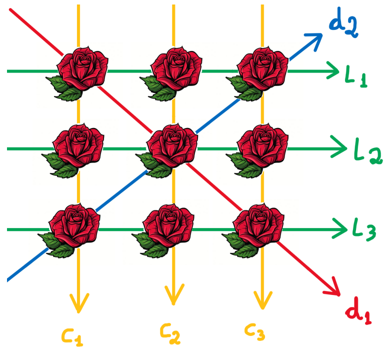


Figura 4.4: Resposta para Um Problema Difícil
Fonte: Produção do Autor

Onde d_1 e d_2 são as diagonais principal e secundária, respectivamente, l_1, l_2 e l_3 são as linhas e c_1, c_2 e c_3 são as colunas da matriz. Formando assim duas diagonais, três linhas e três colunas, que dá um total de oito fileiras com três elementos cada, que são as roseiras. Portando, os jardineiros não perderiam suas cabeças.

4.7 Atividade 7: O Truque do Chapéu

Retirada do Livro de R. W. Galland, "Alice no País dos Enigmas"1, é um enigma que pode ser apresentado em uma aula de probabilidade, lembrando que a noção de probabilidade já foi abordada na seção 2.3, o problema é narrado da seguinte maneira:

> O Truque do Chapéu
>
> O Chapeleiro, Lebre, Tweedledum, Tweedledee, o Carpinteiro e outros cinco cavaleiros estavam caminhando pela praia. Todos usavam chapéus. De repente, uma ventania vinda do mar arrancou os chapéus de suas cabeças, colocando-os empilhados no chão de um barranco. Todos que caminhavam desceram para recuperar seus chapéus na pilha que se formou. Eles tinham areia nos olhos e não distinguiam de quem eram os chapéus. Qual a probabilidade de exatamente nove deles acharem imediatamente seus chapéus? [15]

Note que temos 10 personagens na ocasião, seus chapéus estão empilhados e eles estão com areia nos olhos, ou seja, iram pegar seus chapéus aleatoriamente na pilha, pois não enxergam nada. E então pergunta-se: "qual a probabilidade de exatamente nove deles acharem imediatamente seus chapéus?".

Observe que, na verdade, essa questão contem uma pegadinha, pois se nove deles acharem imediatamente seus chapéus, o décimo também pegará o seu chapéu, e desta maneira não exite probabilidade de exatamente nove acharem imediatamente seus chapéus.

O ato do décimo personagem pegar o seu chapéu, em probabilidade, é chamado de evento certo, pois como sobrará somente o seu chapéu na pilha, a chande dele pegá-lo seria de 100%.

4.8 Atividade 8: Quadrado Mágico

Meu primeiro contato com o quadrado mágico foi com meus colegas no ensino fundamental, estranhamente não foi com um professor, meus colegas o apresentaram como um desafio, que tomou minha atenção e curiosidade, lembro-me que demorei alguns minutos para resolvê-lo e quando consegui, senti felicidade pela conquista, que é proporcionado por desafios e jogos.

O problema, apesar de ser muito antigo, é apresentado no Livro de Malba Tahan, "Matemática Divertida e Curiosa", e pode ser utilizado com os alunos como desafio, que reforça a comutatividade e associatividade da adição de números naturais, Tahan o apresenta da seguinte maneira:

> Tomemos um quadrado e dividamo-lo em 4, 9, 16... quadrados iguais — os quais denominaremos casas.
> Em cada uma dessas casas, coloquemos um número inteiro. A figura obtida será um quadrado mágico quando a soma dos números que figuram numa coluna, numa linha ou sobre uma diagonal for sempre a mesma. Esse resultado invariável é denominado constante do quadrado, e o número de casas de uma linha é o módulo do quadrado.
> Os números que ocupam as diferentes casas de um quadrado mágico devem ser todos diferentes. [40]

Podemos acrescentar que um Quadrado Mágico pode ser encarado como uma matriz quadrada de ordem n, no qual seus elementos variam sucessivamente de 1 até n^2.

Há um consenso que atribuem a invenção do quadrado mágico aos chineses ou japoneses. Uma das versões de sua origem é a lenda de "Lo Shu"[1], diz que por volta do ano 2800 a.C., ocorreram várias enchentes do rio Lo, na China, que destruía as plantações e deixava a população em desespero.

A população decidiu oferecer oferendas para um suposto deus do rio, todas às vezes que colocavam tais oferendas aparecia uma tartaruga, que as observava e desaparecia, porém, as enchentes continuavam. Certa vez que a tartaruga emergiu para observar

[1] Shu significa livro em chinês; Lo é o nome dum afluente do rio Amarelo na China. Lo Shu é tradicionalmente traduzido como o livro do rio. [31]

as oferendas, observou-se que havia um padrão em seu casco, que exibia um quadro com pontos que correspondiam a números, como pode ser observado na seguinte figura: [31]

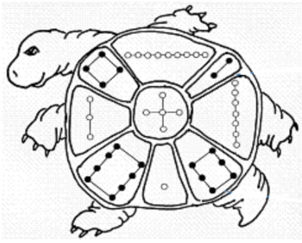


Figura 4.5: Tartaruga de *Lo Shu*
Fonte: [31]

Notou-se, então, que ao somar os números por linha, por coluna e nas diagonais resultava sempre o mesmo número, como é possível ver na seguinte figura:

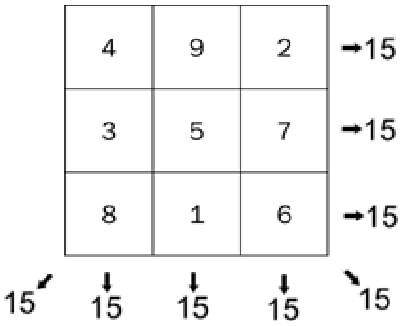


Figura 4.6: A constante mágica no quadrado de *Lo Shu*
Fonte: [31]

Então a população entendeu que deveriam oferecer 15 oferendas, fazendo isso a tartaruga reapareceu, as olhou e logo em seguida surgiu o deus do rio e as aceitou, finalizando assim as constantes enchentes. [31]

Desafie seus alunos inicialmente com o quadrado mágico de ordem 3, e posteriormente com o de ordem 4, para esse pode ser antecipado que a constante mágica é 34. A resposta pode ser vista na seguinte figura.

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

Figura 4.7: Quadrado mágico de ordem 4
Fonte: [40]

Um desafio ainda maior é o quadrado mágico de ordem 3 sugerido por Lewis Carroll, autor de "Alice no País das Maravilhas", no qual ele atribui 9 selos, com os seguintes valores: $\frac{1}{2}d$, $1d$, $1\frac{1}{2}d$, $2d$, $2\frac{1}{2}d$, $3d$, $3\frac{1}{2}d$, $4d$, $5d$, onde d é uma variável. Deve-se utilizar os 9 selos mais um selo extra a escolha, de modo a aumentar o valor de outro selo até a quantidade correta. [15]

Esse desafio trabalha a comutatividade e associatividade da adição dos números racionais positivos, reforçando também os cálculos com frações mistas. A resposta pode ser vista a seguir.

$2\frac{1}{2}d$	$5d$	$1\frac{1}{2}d$
$2d$	$3d$	$4d$
$\frac{1}{2}d + 4d$	$1d$	$3\frac{1}{2}d$

Tabela 4.3: Quadrado mágico de Lewis Carroll
Fonte: [15]

A constante mágica desse quadrado é $9d$ e como d é uma variável podemos encontrar inúmeros quadrados mágicos somente atribuindo valores para d.

4.9 Atividade 9: Idade do Senhor William

Retirada do Livro de R. W. Galland, Alice no País dos Enigmas 1, é uma atividade que pode ser utilizada em aulas de equações polinomiais do primeiro grau, que envolvem frações. A charada é narrada da seguinte maneira:

VOCÊ NÃO É VELHO, SENHOR WILLIAM

"QUANTOS ANOS você realmente tem, Senhor William?"perguntou Alice. "Você parece muito mais jovem do que pensava"
"Em seis anos", respondeu William, "eu estarei uma vez e um quarto tão velho quanto eu era há quatro anos."
Quantos anos têm o Senhor William? [15]

Para encontrar a idade do Senhor William devemos equacionar o problema, encontrando uma igualdade entre dois membros, então seja x a idade do Senhor William, para o primeiro membro observe o trecho "Em seis anos", ou seja, daqui a seis anos ele terá $(x+6)$ anos, e para o segundo membro observe o trecho "eu estarei uma vez e um quarto tão velho quanto eu era há quatro anos". Note que teremos duas parcelas, onde devemos considerar a idade que ele tinha há quatro anos, $(x-4)$, mais um quarto da idade que ele tinha há quatro anos, ou seja, $1 \times (x-4) + \frac{1}{4} \times (x-4)$.

Com isso temos a equação:

$$(x+6) = 1 \times (x-4) + \frac{1}{4} \times (x-4),$$

multiplicando todas as parcelas da equação por 4, temos:

$$4 \times (x+6) = 4 \times 1 \times (x-4) + 4 \times \frac{1}{4} \times (x-4),$$

fazendo a simplificação e efetuando a distributiva, temos:

$$4x + 24 = 4x - 16 + x - 4,$$

simplificando $4x$ em ambos os lados e utilizando o princípio aditivo, ficamos com:

$$x = 24 + 16 + 4,$$
$$x = 44 \text{ anos}$$

Portanto, a idade do Senhor William é de 44 anos.

4.10 Atividade 10: Um Louco Passeio de Bicicleta

Retirada do Livro de R. W. Galland, "Alice no País dos Enigmas"1, é uma atividade que pode ser inserida nas aulas, ou como atividade extra, que trabalha o raciocínio lógico, a tomada de decisão, a visão do espaço, as operações básicas, entre outras habilidades, como a substituição de valores nas equações. A charada é narrada da seguinte maneira.

UM LOUCO PASSEIO DE BICICLETA

> O CHAPELEIRO andou um quilômetro de bicicleta em três minutos a favor do vento, e voltou em quatro minutos contra o vento. Considerando que ele sempre faz a mesma foça nos pedais, quanto tempo levaria para pedalar um quilômetro sem vento? [15]

A primeira resposta que podemos pensar, ou aparecer, seria a média aritmética entre os dois tempos, 3 minutos e 30 segundos, mas essa resposta está errada. Calcular a velocidade da ida e da volta também resultará em uma resposta equivocada.

Para encontrar o tempo sem a ação do vento devemos buscar uma maneira de desconsiderar tal ação no evento. No momento igualamos a distância de $1km$ em ambas as direções, então para desconsiderar a ação do vento devemos igualar o tempo, pois deste modo teremos o espaço que ele consegue percorrer a favor e contra o vento no mesmo tempo. Se contra o vento ele demorou 4 minutos para pedalar $1km$, qual seria o espaço percorrido em 4 minutos a favor? Com o vento a favor ele precisou de 3 minutos, ou seja, percorreu um terço(1/3) de quilômetro para cada minuto, desta maneira, em 4 minutos teria percorrido $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)km$.

Somando os espaços pedalados na ida e na volta temos:

$$1km+\left(1+\frac{1}{3}\right)km=\left(2+\frac{1}{3}\right)km=\frac{7}{3}km$$

que foram cobertos em 8 minutos, 4 para ir e 4 para voltar.

Com as informações obtidas, podemos encontrar a velocidade média, que é a razão da variação do espaço pela variação do tempo, assim temos:

$$V=\frac{\triangle S}{\triangle t}$$

substituindo:

$$V=\frac{\frac{7}{3}}{8}$$

logo:

$$V=\frac{7}{24}km/min$$

Agora, utilizando novamente a equação da velocidade, substituímos $\triangle S=1km$ e $V=\dfrac{7}{24}km/min$, assim:

$$V=\frac{\triangle S}{\triangle t}$$

$$\frac{7}{24} = \frac{1}{\triangle t}$$

fazendo a multiplicação cruzada:

$$7 \times \triangle t = 1 \times 24$$

pelo princípio multiplicativo:

$$\triangle t = \frac{24}{7}$$

logo:

$$\triangle t = \left(3 + \frac{3}{7}\right) minutos$$

Portanto, sem a ação do vento, o Chapeleiro teria percorrido $1km$ em $\left(3 + \frac{3}{7}\right)$ minutos, que são cerca de 3 minutos e 25,71 segundos.

Nas aulas, principalmente as de Matemática e Física, é comum escutar dos alunos a frase "tenho que decorar essas fórmulas?"ou "qual fórmula devo utilizar aqui?", e para contornar isso é interessante fazer com que o aluno entenda fórmulas pelas as unidades de medida, por exemplo, utilizamos a equação da velocidade nessa atividade, e a unidade de medida da velocidade no Sistema Internacional é metros por segundo(m/s), ou seja, é a razão entre o espaço percorrido pelo tempo que o objeto demorou para percorrer esse espaço, e isso tem que ficar bem claro para o aluno, se não, ele só irá realmente decorar uma fórmula.

Ainda falando sobre as unidades de medida, uma alternativa é ensiná-las pelo valor de seus caracteres, por exemplo, o carácter K, em qualquer unidade de medida, vale 1000, ou seja, $2km = 2 \times 1000m$, significa que 2 quilômetros equivalem a 2 mil metros.

Considerações finais

Ao final deste trabalho acreditamos que alcançamos nosso objetivo, que foi resgatar a importância de aliar a leitura, em particular, de obras de divulgação matemática e conteúdos de matemática. Ao longo do estudo, podemos perceber os ganhos de trabalhar matemática nesta perspectiva pedagógica, que para além de apresentar a matemática de maneira mais divertida, trás um frescor na apresentação de alguns assuntos, por exemplo, conjuntos numéricos, bases numéricas e equações lineares envolvendo frações.

Entendemos que a literatura tem um vasto campo para ser explorado no sentido de apoio ao ensino de matemática. A propósito, a leitura e o universo criado nas mais diversas histórias agregam a imaginação, a criatividade e certamente a capacidade crítica. Estes últimos são ingredientes poderosos para quem se propõe entender a matemática para além dos números. Aliás, a matemática encanta quando apresentada como uma ferramenta inerente a atividades humanas.

Dito isso, reforço que este trabalho não teve o intuito de apresentar uma "receita de bolo", regrada e restrita, mas sim de mostrar um modo de abordar conteúdos matemáticos utilizando a literatura, os desafios, enigmas, charadas, etc.

Cada indivíduo tem suas dificuldades, facilidades, desejos, interesses, etc. Isso não muda no contexto de aprendizagem, cada um aprende no seu tempo, uns precisam mais e outro menos, cada turma tem um comportamento diferente, então, muitas vezes, a abordagem que funciona para uma turma, não surtirá o efeito desejado na outra.

Aplicar uma literatura em sala de aula, para expor conceitos matemáticos, certamente não será uma tarefa fácil, pois o trabalho pode ser recebido pela comunidade escolar como algo maléfico que venha a prejudicar e atrasar o ensino da Matemática, visto que é uma abordagem nova de ensinar matemática, cabendo ao profissional que deseja propor esta metodologia, mostrar que pode ser uma alternativa viável e demonstrar seus benefícios.

Creio que através deste trabalho pode-se propor novos desafios, que explorem as obras literárias de divulgação de matemática, de maneira a somar, propondo desafios e incentivando a prática da leitura e o gosto pela matemática, estimulando a criatividade e curiosidade dos alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ABELES, F. Historia da mathematica, multiplication in changing bases: a note on Lewis Carroll, v.3, 1976, p. 183 – 184. Disponível em: <https://pdf.sciencedirectassets.com/272588/1-s2.0-S0315086000X0078X/1-s2.0-0315086076900355/main.pdf> Acesso em: 02 de fev. 2021

[2] BALDOW, R. Ensinando matemática através da literatura infanto-juvenil. In: IV COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE, 22 a 24 de setembro de 2010, Campus UFS – Laranjeiras – Sergipe – Brasil. Disponível em: <http://educonse.com.br/2010/eixo_06/E6-46.pdf>. Acesso em 25 mar. 2021.

[3] BOSCHINI, A. P. M; SILVA, C. L; OLIVEIRA, C. A. da S; JÚNIOR, M. P. O; MIRANDA, M. Z; FAGIOLI, M. Aspectos quantitativos e qualitativos do grão de trigo influenciados por nitrogênio e lâminas de água. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, v.15, n.5, p.450–457,Campina Grande, UAEA/UFCG, 2011. Disponível em <https://www.scielo.br/pdf/rbeaa/v15n5/v15n5a03.pdf> Acesso em: 22 mar. 2021

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

[5] BRITO, B. P. Alice no País das Maravilhas: Uma Crítica à Inglaterra Vitoriana, São Paulo, 2013.

[6] CARROLL, L. Aventuras de Alice no País das Maravilhas e Através do Espelho, edição comentada e ilustrada, Introdução e Notas de Martin Gardner. Tradução de Maria Luzia X.de A. Borges. 2ª ed. Rio de Janeiro: ZAHAR. 2013

[7] CARROLL, L. Alice no País das Maravilhas, tradução de Márcia Feriotti Meira. 3ª ed. São Paulo: Martin Claret. 2014

[8] CAVALCANTE, F. N. S; SILVA, S. D. Grafos E Suas Aplicações. Trabalho de conclusão de curso, Centro Universitário Adventista de São Paulo, campus São Paulo.

2009, p. 11 - 13, 53 - 55. Disponível em <https://docplayer.com.br/23664569-Grafos-e-suas-aplicacoes.html> Acesso em: 29 jan. 2021

[9] COSTA, P. P. Teoria de Grafos e suas Aplicações. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro- SP. 2011, p. 17, 24. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-polyanna.pdf> Acesso em: 28 jan. 2021

[10] DOMINGUES, H. H; IEZZI, G. Álgebra Moderna, 4ª ed. São Paulo: Atual. 2003, p. 7 – 13.

[11] FÁVARO, S; FILHO, O. Noções de Lógica e Matemática Básica, 1ª ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2005, p.31 – 34

[12] FILHO, E. A. Iniciação à LÓGICA MATEMÁTICA, 1ª ed. São Paulo: Nobel. 2002, p. 11 – 31

[13] FRANCO, N. B. Calculo Numérico. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003, p. 38 – 41.

[14] FURNER, J. M. Using Children's Literature to Teach Mathematics: An Effective Vehicle in a STEM World. European Journal of STEM Education, 2018. Disponível em: <https://www.lectitopublishing.nl/download/using-childrens-literature-to-teach-mathematics-an-effective-vehicle-in-a-stem-world-3874.pdf> Acesso em: 22 abr. 2021

[15] GALLAND. R. W. Alice no País dos Enigmas 1, v.1, Rio de Janeiro: Ediouro Publicações. 2013

[16] GALLAND. R. W. Alice no País dos Enigmas 2, v.2, Rio de Janeiro: Ediouro Publicações. 2014

[17] GARDNER, M. Notas em: Aventuras de Alice no País das Maravilhas e Através do Espelho, edição comentada e ilustrada. Tradução de Maria Luzia X.de A. Borges. 2ª ed. Rio de Janeiro: ZAHAR. 2013

[18] GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R; JUNIOR, J. R. Matemática Completa: Ensino Médio: Volume Único. São Paulo: FTD, 2002.

[19] HAZZAN, S. Fundamentos da Matemática Elementar, 7ª ed. São Paulo: Atual, 2004. p. 89 – 98.

[20] HEFEZ, A. Aritmética, 2ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Basileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2016. p. 40

[21] HOLLAS, J; HAHN, C. T; ANDREIS, R. F. Matemática, leitura e aprendizagem, Florianópolis, 2012, p.18-31.

[22] INEP. Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil. Artigo digital, 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206> Acesso em 19 de mai. de 2021

[23] JURKIEWICZ, S. Grafos – Uma Introdução. OBMEP, 2009, p. 01 – 10, 45 – 56. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf> Acesso em: 29 jan. 2021

[24] LEMOS, A. P. R; OLIVEIRA, A. L; SILVA, D. G. Interdisciplinaridade do xadrez com a matemática. Minas Gerais: ACADEMIA ARAXAENSE DE XADREZ.

[25] MARQUES, P. Curiosidade I - O Problema dos quatro quatros. Feira de Santana - BA, Website, 2010. Disponível em: <http://www.paulomarques.com.br/arq11-7.htm>. Acesso em 08 de mar. de 2021.

[26] MONTOITO, R; MENDES, I. A. Na mesa com Alice: sobre diálogos matemáticos a partir da obra de Lewis Carroll. In: ENCONTRO LATINO AMERICANO DE INICIAÇÃO CIENTIFICA, 10, São Jose dos Campos, 2006, p. 2328 – 2331.

[27] MONTOITO, R. Uma visita ao universo matemático de lewis carroll e o (re)encontro com a sua lógica nonsense. Natal, 2007, p. 186 – 187.

[28] OBMEP. Números especiais – números perfeitos. Clubes de Matemática da OBMEP, Disseminando o estudo da matemática. Artigo digital. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-numeros-perfeitos/.>. Acesso em 26 de mar. de 2021.

[29] OSÓRIO, C. Qual a relação entre "Alice no País das Maravilhas" e a Matemática? 2011. Disponível em: <https://catiaosorio.wordpress.com/tag/lewis-carroll/> Acesso em: 25 mar. 2021

[30] PEREIRA, A. F; SALLES P. P; PEREIRA, R. F. Site Oficial da Família e dos Admiradores de Malba Tahan. Patrocínio: Grupo Editorial Record. Disponível em: <https://www.malbatahan.com.br/contato/>. Acesso em 08 de mar. de 2021.

[31] RICARDO, S; AMARAL, E; MACEDO, Â; CORREIA, E. Estórias da História da Matemática. Artigo de revista, Vila Real, Portugal: História da Ciência e Ensino, Construindo interfaces. 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/viewFile/44868/31003>. Acesso em: 17 de mar. de 2021.

[32] SANTOS, J. A.; França, K. V.; Santos L. S. B.: Dificuldades na Aprendizagem de Matemática, Centro Universitário Adventista de São Paulo, Campus São Paulo, São PAULO, 2007. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf>. Acesso em: 05 de fev. de 2021.

[33] SAVEGNAGO, R. M; SCHMITZ, S. F. Utilizando a literatura para ensinar matemática como metodologia de ensino de conteúdos do sexto ano. Paraná, 2014. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unioeste_mat_artigo_rejane_maria_savegnago.pdf> Acesso em: 05 abr. 2021

[34] SILVEIRA, M. A. A Interdisciplinaridade da Obra O Homem que Calculava, Aplicada ao Ensino de Matemática, São José do Rio Preto: Dissertação de Mestrado, 2015

[35] SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades básicas para apender matemática, Porto Alegre: Artmed, 2001.

[36] SOUZA, C. G. Lewis Carroll e a educação vitoriana em Alice no País das Maravilhas. 2012.

[37] SPERANDIO, D; MENDES, João T; SILVA, L. H. M. Calculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003, p. 6 – 8.

[38] SYLVIO, R. O xadrez pré-escolar: uma abordagem pedagógica. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.

[39] TAHAN, M. O Homem que Calculava. 83º ed. Rio de Janeiro e São Paulo: EDITORA RECORD, 2013

[40] TAHAN, M. Matemática Divertida e Curiosa, 15º ed. Rio de Janeiro: Record, 2001

[41] VERNA, S. Ideias Geniais na Matemática, 2ª ed. Belo Horizonte: GUTENBERG. 2014, p. 93 – 94

[42] ZWIERNIK, L. MATEMÁTICA NO PAÍS DA LITERATURA: uma proposta didática com o livro "Alice no País dos Números". Trabalho de Conclusão de Curso. UFRS-PORTO ALEGRE. 2015

Apêndice: Material adicional

.

A.1 Principais obras de Lewis Carroll

As obras que se seguem são as principais de Lewis Carroll, organizadas em ordem de publicação, sendo as duas últimas, em itálico, publicadas postumamente, porém, sem alteração do conteúdo original. [27]

1860 – A Syllabus of Plane Algebrical Geometry

1861 – The Formulae of Plane Trigonometry

1864 – A Guide to the Mathematical Student

1865 – Alice's Adventures in Wonderland

1985 – The Dynamics of a Particle

1865 – The New Method of Evaluation

1867 – Na Elementary Treatise on Determinants

1868 – The Fifth Book of Euclid Treated Algebraically

1869 – Phantasmagoria and Other Poems

1872 – The New Belfry of Christ Church, Oxford

1872 – Through the Looking Glass and What Alice Foud There

1873 – The Vision of the Three T's

1874 – Suggestions as to the Best Method of Taking Votes

1874 – The Blank Cheque: A Fable

1876 – A Method of Taking Votes on more than Two Issues

1876 – The Hunting of the Snark: An Agony in Eight Fits

1879 – Doublets: A Word-Puzzle

1879 – Euclid and His Modern Rivals

1883 – Rhyme? And Reason?

1885 – A Tangled Tale

1885 – Supplement to 'Euclid and His Modern Rivals'

1886 – Alice's Adventures Under Ground

1886 – The Game of Logic

1886 – Three Years in a Curatorship, by One Who Has Tried

1888 – Curiosa Mathematica, Part I: A New Theory of Parallels

1889 – Sylvia and Bruno

1889 – The Nursery Alice

1890 – Eight or Nine Wise Words about Letter-Writting

1893 – Curiosa Mathematica, Part II:Pillow-Problems

1893 – Sylvia and Bruno Conclued

1893 – Syzygies and Lanrick: A Word-Pazzle and a Game

1896 – Symbolic Logic, Part I: Elementary

1932 – *The Rectory Umbrella and Mischmasch*

1977 – *Symbolic Logic, Part I and II*

A.2 Principais obras de Malba Tahan

As obras seguintes são as principais de Malba Tahan, organizadas em ordem de publicação, por tema e por edição. Esta lista foi encontrada no site oficial da Família e dos Admiradores Malba Tahan, visite <www.malbatahan.com.br>.

Contos de Malba Tahan - Literatura Oriental - 1ª edição: 1925

Céu de Allah - Literatura Oriental - 1ª edição: 1927

Amor de beduíno - Literatura Oriental - 1ª. edição: 1929

Lendas do deserto - Literatura Oriental - 1a edição: 1929

Mil histórias sem fim, volume I - Literatura Oriental - 1ª edição: 1931

Curso de Matemática – 2º Ano - Livros Escolares - 1ª edição: 1931

Matemática – 2º Ano - Livros Escolares - 1ª edição: 1931

Mathemática – 1º Anno - Livros Escolares - 1ª edição: 1931

Geometria Analítica – Parte I - Didática - 1ª edição: 1931

Matemática Comercial - Livros Escolares - 1ª edição: 1932

Trigonometria hiperbólica - Didática - 1ª edição: 1932

Algebra – 3º Anno - Livros Escolares - 1ª edição: 1932

Mil histórias sem fim, volume II - Literatura Oriental - 1ª edição: 1933

Curso de Mathemática – 5º Ano - Livros Escolares - 1ª edição: 1933

Lendas do céu e da terra - Literatura Oriental - 1ª edição: 1933

Curso de Mathemática – 4º Anno - Livros Escolares - 4ª edição: 1933

Lendas do oásis - Literatura Oriental - 1ª edição: 1933

Estudo elementar das curvas - Didática - 1ª edição: 1933

Funções moduladas - Didática - 1ª edição: 1933

Matemática divertida e curiosa - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1934

Exame de Admissão - Livros Escolares - 1ª edição: 1934

Maktub - Literatura Oriental - 1ª edição: 1935

Amigos maravilhosos - Obras Infanto-Juvenis - 2ª edição: 1935

Alma do oriente - Literatura Oriental - 1ª edição: 1936

Novas lendas do deserto - Literatura Oriental - 1a edição: 1936

Tudo é fácil – Ano primário - Livros Escolares - 1ª edição: 1937

O homem que calculava - Literatura Oriental - 1ª edição: 1937

Matemática fácil e atraente - Livros Escolares - 1ª edição: 1938

Curso de Mathemática – 3º AnoLivros Escolares - 3ª edição: 1938

Histórias e fantasias da Matemática - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1939

Lendas do povo de Deus - Literatura Oriental - 1ª edição: 1939

Paca, Tatu... - Obras Infanto-Juvenis - 1ª edição: 1939

Dicionário da Matemática, vol I - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1940

A sombra do arco-íris - Literatura Oriental - 3ª edição: 1941

Matemática divertida e pitoresca - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1941

Minha vida querida - Literatura Oriental - 5ª edição: 1941

Dicionário da Matemática, vol II - Matemática recreativa - 1ª edição: 1942

Dicionário da Matemática, vol III - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1942

Matemática divertida e fabulosa - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1942

Geometria Analítica – Parte II - Didática - 3ª edição: 1943

Matemática divertida e diferente - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1943

Diabruras da Matemática - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1943

O livro de Aladim - Literatura Oriental - 1ª edição: 1943

Matemática Ginasial – 2a. Série - Livros Escolares - 1ª edição: 1943

Matemática Ginasial – 1a. Série - Livros Escolares - 1ª edição: 1943

Tábuas completas (logarítimos e formulários) - Didática – 1944

Matemática Ginasial – 3a. Série - Livros Escolares - 1ª edição: 1944

Meu caderno de Matemática - Didática - 2ª edição: 1945

As grandes fantasias da Matemática - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1945

A Divina Comédia – O inferno – Dante, Tradução comentada. vol I - Diversos - 1ª edição: 1947

O escândalo da Geometria - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1947

O Guia Carajá - Diversos - 1ª edição: 1947

A Divina Comédia – O inferno – Dante, Tradução comentada. vol II - Diversos - 1ª edição: 1948

O aviso da morte - Diversos - 1ª edição: 1948

Matemática, Aritmética – Série Admissão - Didática - 1ª edição: 1950

Matemática suave e divertida - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1951

Lendas do bom rabi - Literatura Oriental - 1ª edição: 1951

Seleções - Literatura Oriental - 3ª edição: 1954

Folclore da Matemática - Matemática Recreativa - 1ªedição: 1954

As aventuras do rei Baribê - Literatura Oriental - 3ª edição: 1954

Alegria de ler - Didática - 16ª edição: 1955

Diário de Lúcia - Livros Escolares - 10ª edição: 1955

A lua – astronomia dos poetas brasileiros - Diversos - 1ª edição: 1955

Sob o olhar de Deus - Diversos - 2ª edição: 1955

Meu anel de sete pedras - Matemática Recreativa - 2ª edição: 1955

A arte de ler e de contar histórias - Didática - 1ª edição: 1957

Técnicas e procedimentos didáticos no ensino da Matemática - Didática - 1ª edição: 1957

Didática da Matemática - Didática - 1ª edição: 1957

A caixa do futuro - Obras Infanto-Juvenis - 1ª edição: 1958

Apostilas de didática especial de Matemática - Livros Escolares - 1ª edição: 1958

Exercícios de Matemática – 3º Ano - Livros Escolares - 4ª edição: 1938

Novas lendas orientais - Literatura Oriental - 1ª edição: 1959

O bom caminho - Diversos - 6ª edição: 1959

A equação da cruz - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1959

Antologia da Matemática I - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1960

Antologia da Matemática II - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1961

Matemática divertida e delirante - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1942

Matemática recreativa, volume I - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1965

Matemática recreativa, volume II - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1965

Os números governam o mundo - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1965

O problema das definições em Matemática - Didática - 1ª edição: 1965

A lógica na Matemática - Didática - 1ª edição: 1966

A estrela dos Reis Magnos na história e na poesia - Diversos - 1ª edição: 1967

O mundo precisa de ti professor - Didática - 1ª edição: 1967

O professor e a vida moderna - Didática - 1ª edição: 1967

Romance do filho pródigo - Literatura Oriental - 1ª edição: 1967

Ainda não, Doutor - Diversos - 1ª edição: 1967

Roteiro do bom professor - Didática - 1ª edição: 1969

Numerologia - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1969

Antologia do bom professor - Didática – 1969

Páginas do bom professor - Didática - 1ª edição: 1969

O mistério do Mackensista - Diversos - 1ª edição: 1970

Salim, o mágico - Literatura Oriental - 1ª edição: 1970

Iazul - Literatura Oriental - 1ª edição: 1970

Acordaram-me de madrugada - Diversos – 1973

A Matemática na lenda e na história - Matemática Recreativa - 1ª edição: 1974

As maravilhas da Matemática - Matemática Recreativa - 3ª edição: 1974

Belezas e maravilhas do céu - Diversos - 1ª edição: 1974

O Jogo do Bicho à luz da matemática - Matemática Recreativa – 1975

A arte de ser um perfeito mau professor - Didática - 1967