GOVERNO DO ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
“CARLOS ALBERTO REYES MALDONADO”
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPGECM

FABIO ANTUNES BRUN DE CAMPOS

O ENSINO DA MATEMÁTICA COM FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PERCEPÇÕES EM MEIO AO CURSO ENFRAC

Barra do Bugres
Março de 2020

FABIO ANTUNES BRUN DE CAMPOS

O ENSINO DA MATEMÁTICA COM FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PERCEPÇÕES EM MEIO AO CURSO ENFRAC

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), da Universidade do Estado de Mato Grosso "Carlos Alberto Reyes Maldonado" (Unemat).
Orientadora: Dr.ª Minéia Cappellari Fagundes.
Linha de Pesquisa: Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências e Matemática.

Barra do Bugres
Março de 2020

Luiz Kenji Umeno Alencar CRB 1/2037

C198o

CAMPOS, Fabio Antunes Brun de.
O Ensino da Matemática com Fractais na Educação Básica: Percepções em Meio ao Curso Enfrac / Fabio Antunes Brun de Campos – Barra do Bugres, 2020.
106 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Acadêmico) Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Barra do Bugres, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2020.
Orientador: Dr. ª Minéia Cappellari Fagundes

1. Fractais. 2. Práticas de Ensino. 3. Tecnologias Digitais. I. Fabio Antunes Brun de Campos. II. O Ensino da Matemática com Fractais na Educação Básica: Percepções em Meio ao Curso Enfrac: .

CDU 37.02:51

FABIO ANTUNES BRUN DE CAMPOS

O ENSINO DA MATEMÁTICA COM FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PERCEPÇÕES EM MEIO AO CURSO ENFRAC.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECM - da Universidade do Estado de Mato Grosso "CARLOS ALBERTO REYES MALDONADO", *Câmpus* Univ. Dep. Est. "Renê Barbour" – Barra do Bugres - MT, como requisito obrigatório para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em: 05 de março de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Minéia Cappellari Fagundes

Profª. Drª. Minéia Cappellari Fagundes (UNEMAT/PPGECM)
Orientadora

Frederico J. A. Lopes

Prof. Dr. Frederico José Andries Lopes (UFMT)
Examinador Externo

Prof. Dr. Diego Piasson (UNEMAT/PPGECM)
Examinador Interno

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, meu Senhor e Salvador, por me sustentar e me dar ânimo e sabedoria e por estar presente em todas as etapas deste Mestrado. Sei que o Senhor é o autor e consumador de todas as coisas e que, sem o teu cuidado, o sonho de ser mestre não se tornaria realidade.

À minha esposa, Fabíola de Souza Leal Antunes, minha eterna gratidão pelo apoio, pelo incentivo, pelas críticas e por se dispor a contribuir com todos os processos de execução deste trabalho – enfim, por ser e se engajar na missão de ser minha ajudadora.

À Minéia Cappellari Fagundes, professora serena, equilibrada e forte, agradeço a dedicação, a sensibilidade e os “nãos” recebidos durante as suas orientações no trajeto do Mestrado. Aprendi e tenho muito o que aprender com a senhora.

Aos docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), deixo minha gratidão por todo conhecimento construído e pelas noções desconstruídas durante o curso. Além disso, agradeço a vocês pelo compartilhamento das experiências profissionais e pelos bons exemplos de como ser professor.

Agradeço também aos colegas turma de 2018/1 do PPGECM, por poder contar com pessoas que entendem o que é lutar, que estão dispostas a ensinar, e que, em primeiro lugar, anseiam por aprender. Cresci muito com vocês, com as suas experiências e com os seus ensinamentos.

Agradeço, ainda, àqueles que contribuíram direta ou indiretamente com a minha caminhada durante o Mestrado e com o processo de pesquisa e escrita desta dissertação. O meu muito obrigado àqueles que cooperaram de alguma forma para o meu crescimento profissional.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa de abordagem qualitativa, realizada durante o curso “Ensino da Matemática com Fractais” (Enfrac), destinado a professores de Matemática e Pedagogia do estado de Mato Grosso. Tal curso foi desenvolvido de forma semipresencial, com aulas presenciais no *campus* de Barra do Bugres da Universidade do Estado de Mato Grosso e com aulas à distância pela plataforma do *Google Sala de Aula* (ou *Google Classroom*). Os professores cursistas foram apresentados a práticas de ensino da Matemática com fractais, por meio de recursos manipuláveis e digitais, voltados para o ensino na Educação Básica. Entre essas práticas realizadas pelos cursistas, podem ser destacados a apresentação de jogos digitais de aprendizagem, a criação da “Pirâmide Enfrac”; uma pirâmide fractal por cubos, a construção de fractais no *GeoGebra* e a construção de um caleidoscópio. Após a aplicação dessas práticas, eles avaliaram as propostas e buscaram identificar objetos do conhecimento matemático possíveis de serem abordados no Ensino Básico. Dessa forma, o objetivo de pesquisa deste trabalho consistiu em compreender como abordar práticas de ensino da matemática com fractais, para a Educação Básica. Para a análise dos dados, utilizamos a triangulação, que teve como instrumentos a observação, os materiais produzidos pelos cursistas, vídeos, imagens e a aplicação de três questionários. Como resultados, foi possível perceber que as práticas de ensino apresentadas aos cursistas do Enfrac podem serem replicadas ou adaptadas em outras práticas de ensino da Matemática para a Educação Básica e que os recursos digitais devem fazer parte das práticas de ensino da Matemática com fractais nesse contexto de ensino. Assim, esperamos que este trabalho possa contribuir para a inserção ou popularização do ensino da geometria Fractal na Educação Básica e para realização de outras práticas de ensino da Matemática com tecnologias digitais nessa etapa de escolarização.

Palavras-chave: Fractais. Práticas de ensino. Tecnologias digitais.

ABSTRACT

This work presents a qualitative research, carried out during the course "Teaching Mathematics with Fractals" (Enfrac), aimed at teachers of Mathematics and Pedagogy in the state of Mato Grosso, Brazil. This course was developed with a blended learning strategy, with face-to-face classes on the Barra do Bugres campus of the University of the State of Mato Grosso and with online classes through the Google Classroom platform. Participants were introduced to Mathematics teaching practices with fractals, through manipulable and digital resources, aimed at teaching in Basic Education. Among these practices carried out by course participants, the presentation of digital learning games, the creation of the "Pirâmide Enfrac"; a fractal pyramid by cubes, the construction of fractals in GeoGebra and the construction of a kaleidoscope. After applying these practices, they evaluated the proposals and sought to identify objects of mathematical knowledge that could be addressed in Basic Education. Therefore, in this course, we aimed to understand how to approach Mathematics teaching practices with fractals for Basic Education. For data analysis, we used triangulation, which used observation instruments, materials produced by course participants, videos, images and the application of three questionnaires. As a result, it was possible to understand that the teaching practices presented to Enfrac participants can be replicated or adapted in other teaching practices for Mathematics in Basic Education and that digital resources should be part of the teaching practices of Mathematics with fractals in this context. Therefore, we hope that this work can contribute to the insertion or popularization of the teaching of the Fractal geometry in Basic Education and for the development of other teaching practices of Mathematics with digital technologies during such stage.

Keywords: Fractals. Teaching practices. Digital technologies.

LISTA DE FIGURAS, QUADROS E TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente século, existem vários campos de estudo da geometria: a geometria "Analítica, com Complexos, Descritiva, Esférica, Fractal, Euclidiana, [...] Projetiva e Ortogonal" (SCHMIDT, 2014, p. 32). Todos esses diferentes campos de estudos podem contribuir para o desenvolvimento das habilidades humanas de compreensão do mundo. Porém, como comentam Leivas (2009), Dario (2014), Schmidt (2014) e Dalpiaz (2016), na maioria das vezes, o ensino desse ramo da Matemática limita-se à geometria Euclidiana. Tal campo de estudo deve a sua designação ao matemático Euclides de Alexandria, que, em meados dos anos 300 a.C., desenvolveu uma obra conhecida como *Os Elementos* ou *Os Postulados de Euclides*. Nela, o autor "demostra 465 propriedades" a partir de cinco axiomas matemáticos, os quais são reconhecidos até os dias atuais (DARIO, 2014, p. 12).

Por outro lado, Mandelbrot (1977, p. 1) afirma que, embora bastante estudada e difundida, em muitos casos, a geometria Euclidiana não é suficiente para representar determinadas formas. O autor comenta sobre a incapacidade desse ramo da geometria de descrever, por exemplo, "a forma de uma nuvem, de uma montanha, de um litoral, ou de uma árvore" e enfatiza que "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca de uma árvore não é lisa, e nem relâmpago viaja em linha reta". Mandelbrot afirma que a geometria dedicada a tais formas "quebradas" e "irregulares" é chamada de "geometria Fractal". Conforme afirma Bainer (2005, p. 113), a palavra "fractal" foi cunhada por Mandelbrot, "a partir do adjetivo latino *fractus* e designa objetos matemáticos utilizados para descrever as formas irregulares relacionadas com os fenômenos da natureza".

Desde o século XIV, essas formas irregulares encontradas na natureza têm sido objeto de estudos de alguns matemáticos, tais como Dürer (1471-1528), Peano (1858 - 1932), Sierpinski (1882 - 1969), entre outros (NUNES, 2006; RABAY, 2013). Contudo, e por apresentarem uma geometria diferente da Euclidiana e colocarem em xeque algumas das bases matemáticas de outras épocas, desse período até o século XIX, eram consideradas "casos patológicos" ou "monstros matemáticos" (NUNES, 2006, p. 15).

Hoje, o estudo da geometria Fractal se desenvolveu e está intimamente ligado à chamada “Ciência do Caos”. Por meio da geração e da reprodução de imagens, essa área contribui, por exemplo, para o estudo das oscilações do coração e do cérebro, das interligações microscópicas de vasos sanguíneos, das ramificações alveolares, das cotações da bolsa de valores, da desordem na atmosfera e da forma das nuvens, dos relâmpagos e das aglomerações estrelares (BARBOSA, 2005).

O meu primeiro contato com essa geometria foi em 2012, durante a minha graduação, em um momento em que, observando uma aplicação para o conteúdo de funções exponenciais, em um livro didático, encontrei um fractal. Deste então, busquei inserir a geometria Fractal em minhas práticas docentes no contexto da disciplina de Matemática na Educação Básica, fui conhecendo e me encantando com as aplicações, suas curiosidades e possibilidades de ensino, dessa geometria, na Educação Básica.

Em 2018, ano do meu ingresso ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECEM), ofertado pela Universidade do Estado do Mato Grosso (Unemat) no *campus* de Barra do Bugres, apresentei uma proposta de pesquisa voltada para esse tema. A Prof.ª Minéia Cappellari Fagundes aceitou o convite para conhecermos mais sobre essa geometria e, assim, tornou-se minha orientadora.

Ao iniciarmos juntos os estudos sobre a geometria Fractal, percebemos que vários autores vêm discutindo a inserção dessa geometria na Educação Básica, como, por exemplo, Bainer (2005), Barbosa (2005), Gomes (2010), Faria (2012), Rabay (2013), Reis (2014), Bágio (2014) e Titoneli (2017), entre outros que comentaremos neste trabalho. Eles indicam que o ensino da Matemática atrelado a essa geometria precisa ser intensificado nessa etapa educacional. Com base nos resultados de suas pesquisas, têm mostrado que a geometria Fractal é um conteúdo que auxilia no desenvolvimento “das outras geometrias” e de outras unidades temáticas[1] do currículo da Matemática para a Educação Básica, conforme orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) –

[1]De acordo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 28), “para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas”.

como exemplos de tais unidades, temos números, álgebra, grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

Baseando-nos nos autores referidos anteriormente, realizamos uma experiência com professores que ensinam Matemática durante o I Encontro Mato-Grossense de Professores que Ensinam Matemática (I Emapem), em 2018, com o minicurso “Fractais: o que são, como construir e como aplicar em sala de aula?”. A partir dessa experiência, comprovamos o que afirma Leivas (2012, p. 10) ao apontar que o tema da geometria Fractal ainda é desconhecido por um “grande número de professores que atuam e atuarão na formação” de crianças, adolescentes e jovens estudantes da Educação Básica.

Pensando nisso, este trabalho apresenta uma pesquisa de abordagem qualitativa, realizada durante um curso que denominamos de “Ensino da Matemática com Fractais” (Enfrac), no qual buscamos compreender como abordar a geometria Fractal no ensino da Matemática para a Educação Básica. Para isso, utilizamos os seguintes instrumentos de coletas de dados: imagens, vídeos, áudios, materiais (ou recursos) didáticos produzidos pelos cursistas, questionários semiestruturados e a observação das resoluções e interações dos cursistas com atividades propostas a eles. O curso foi destinado a professores de Pedagogia e Matemática do estado de Mato Grosso e realizado no modelo híbrido, com aulas presenciais, que aconteceram na Unemat do *campus* Barra do Bugres, e aulas à distância, por meio da plataforma do *Google Sala de Aula* (ou *Google Classroom*).

No curso, aplicamos práticas de ensino da Matemática com fractais por meio de materiais didáticos manipuláveis e utilizamos o *software GeoGebra* para a construção de fractais. Além disso, criamos dois objetos digitais de aprendizagem e apresentamos aos cursistas. Eles avaliaram as práticas e buscaram identificar conteúdos (ou objetos do conhecimento) possíveis de serem abordados no ensino da Matemática na Educação Básica.

Salientamos que um material didático manipulável, segundo Lorenzato (2006, p. 18), é “qualquer instrumento útil para o processo de ensino e aprendizagem”. Dentre estes instrumentos, podemos destacar os objetos desenvolvidos e/ou criados de forma a que o aluno possa tocar, manusear ou se envolver de forma física com o objeto. Além disso, torna-se fundamental que esse instrumento venha a ser utilizado no processo de ensino para facilitar a compreensão, o estudo e o desenvolvimento dos conceitos estudados nas aulas (SOUZA; OLIVEIRA, 2010).

Quanto ao *GeoGebra*, trata-se de um *software* que combina geometria e álgebra e permite ao usuário construir figuras, movimentá-las (ou arrastá-las) e mudá-las de cor, além de construir gráficos, marcar pontos, medir comprimentos, áreas e volumes, entre outros recursos (HESPANHOL *et al*., 2016). Esse *software* está disponível para *download* gratuitamente em dispositivos como computador, *notebook*, *tablet* e celular.

Segundo Tarouco e Cunha (2006, p. 1), os objetos digitais de aprendizagem são recursos digitais “capazes de oferecer estratégias de aprendizagem diversificadas e ajustadas às necessidades dos estudantes”. Vídeos, imagens, apostilas digitais e jogos, entre outros recursos pedagógicos obtidos na Internet, são exemplos de tais objetos.

Entre os materiais didáticos manipuláveis apresentados para os cursistas do Enfrac ou desenvolvidos por eles, estão os cubos por dobraduras, uma pirâmide fractal e o caleidoscópio.

Com o uso das tecnologias digitais, os cursistas construíram vários fractais clássicos no *GeoGebra*: uma pirâmide fractal inédita, criada e nomeada pelos cursistas de “Pirâmide Enfrac”, e forma apresentados ao jogo do caos. Além desse jogo, o triângulo de Pascal e as potências com os fractais também foram apresentados aos cursistas.

As atividades propostas foram avaliadas positivamente pelos participantes, que afirmaram enxergar a possibilidade de replicá-las, adaptá-las e partilhá-las com alunos e com outros professores que ensinam Matemática na Educação Básica. O fato de os jogos digitais estarem disponíveis para acesso *online* também facilita o acesso a um maior número de pessoas.

Neste trabalho, são apresentadas as práticas desenvolvidas no Enfrac, as percepções sobre o ensino da Matemática com os fractais reveladas durante o curso, o uso das tecnologias digitais e as possibilidades de ensino da geometria Fractal no contexto da Educação Básica atual.

2 O ENSINO DA MATEMÁTICA COM FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Estamos cercados por diversas formas geométricas: triângulos, quadrados, círculos, pirâmides, cones etc. Mas qual é a forma de uma pedra, de uma árvore ou de suas folhas? Será que se trata de cubos, pirâmides ou circunferências? Por mais que exista uma pequena possibilidade de esses objetos da natureza serem descritos pela chamada geometria Euclidiana, não, tais formas geralmente não são cubos, pirâmides e nem circunferências. Sendo assim, pode-se afirmar que elas, provavelmente, são melhor descritas pela geometria Fractal. Um dos conceitos geométricos ainda pouco disseminados no ensino da Matemática, segundo Baier (2005), é precisamente o dessa geometria. Para esse autor,

> No primeiro contato do aluno com a *geometria* é estudada apenas a Euclidiana, como se fosse a única possibilidade de concepção de espaço, sendo priorizadas as figuras com contornos definidos. Deste modo, é afirmado continuamente um modo de ver o sistema do universo como completamente previsível, constituído de partes separadas e funcionando como um mecanismo bem ajustado. (BAIER, 2005, p. 140).

De acordo com a BNCC, o estudo da geometria envolve “um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p. 271). Esses conceitos envolvem a compreensão desde as formas planas até as espaciais, desde as regulares até as mais irregulares. No ensino da Matemática com fractais, de acordo com Barbosa (2005, p. 14), é possível apresentar ao aluno o que é belo, desenvolvendo o senso estético, algo que é restrito a poucos tópicos da disciplina em questão. Apresentar a imagem de um fractal em sala de aula é algo que, em primeiro lugar, chama a atenção dos alunos. Por outro lado, “não podemos falar em fractal sem analisar suas raízes, suas características e seus padrões” (ARAÚJO, 2014, p. 3) – afinal, essa geometria pode revelar vários conceitos matemáticos fundamentais para a Educação Básica. Como ressalta Araújo (2014, p. 3), por trás dessa beleza visual “se esconde muita Matemática”.

No decorrer deste capítulo, iremos apresentar a definição de “fractal” e analisar em detalhe as suas características. Apresentaremos também algumas das aplicações e curiosidades ligadas a essas formas geométricas e ainda algumas práticas de ensino da Matemática com os fractais desenvolvidas na Educação Básica e encontradas na literatura. Indicamos, dessa forma, alguns caminhos para a realização de outras práticas de ensino.

2.1 Fractais: definições, características e tipos

Entre 1970 e 1980, Mandelbrot, considerado o principal precursor da geometria Fractal, sentiu a necessidade de nomear e definir as formas irregulares da natureza, os padrões encontrados em meio aos Caos, conhecidas como “casos patológicos” ou “monstros matemáticos”, de “fractais”. Apesar de encontrar dificuldades para realizar tal feito, ele decide nomeá-los de “fractais” e os definiu da seguinte forma: “- Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual, a dimensão Hausdorff Besicovitch, excede estritamente a dimensão topológica; - Todo conjunto D, com dimensão fracionária é um fractal” (MANDELBROT, 1977, p.15, tradução nossa).

O termo “fractal” deriva-se do “latim *fractus*, adjetivo do verbo *frangere*, que significa ‘quebrar’ criar fragmentos irregulares, fragmentar” (NEGRI, 2014, p. 15). Sendo assim, podemos afirmar que a geometria Fractal não se baseia no estudo de estruturas regulares, como polígonos convexos ou formas como quadrados, triângulos, círculos etc. – tais formas são objeto de estudo da geometria Euclidiana, conforme já referimos.

Contudo, a definição dos fractais apresentada por Mandelbrot recebeu algumas críticas por não abranger de forma ampla essas formas irregulares, após a apresentação de dois importantes trabalhos de K. J. Falconer sobre os fractais e sobre a dimensão de Hausdorff, em 1985 e 1990. Barbosa (2005) apresenta a seguinte definição para os fractais:

> Um conjunto F é fractal se, por exemplo:
> -F possui alguma forma de ‘autossimilaridade’ ainda que aproximada ou estatística;
> - A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
> - O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo. (BARBOSA, 2005, p. 18-19).

Considerando ambas as definições e alguns estudos recentes sobre o ensino da Matemática com fractais, como os de Modesto (2015), Luz (2016), Mendes Junior (2017) e Valmorbida (2018), entendemos que ao se definir essas estruturas podemos considerar as características de autossemelhança, complexidade infinita, irregularidade e dimensão fracionária.

Ao se observar um fractal, é possível perceber que suas partes se repetem no todo de sua estrutura e essas partes repetidas preservam as características de semelhanças umas das outras. Trata-se de uma das suas principais características, chamada de “autossemelhança” (MODESTO, 2015; LUZ, 2016; MENDES JÚNIOR, 2017; VALMORBIDA, 2018).

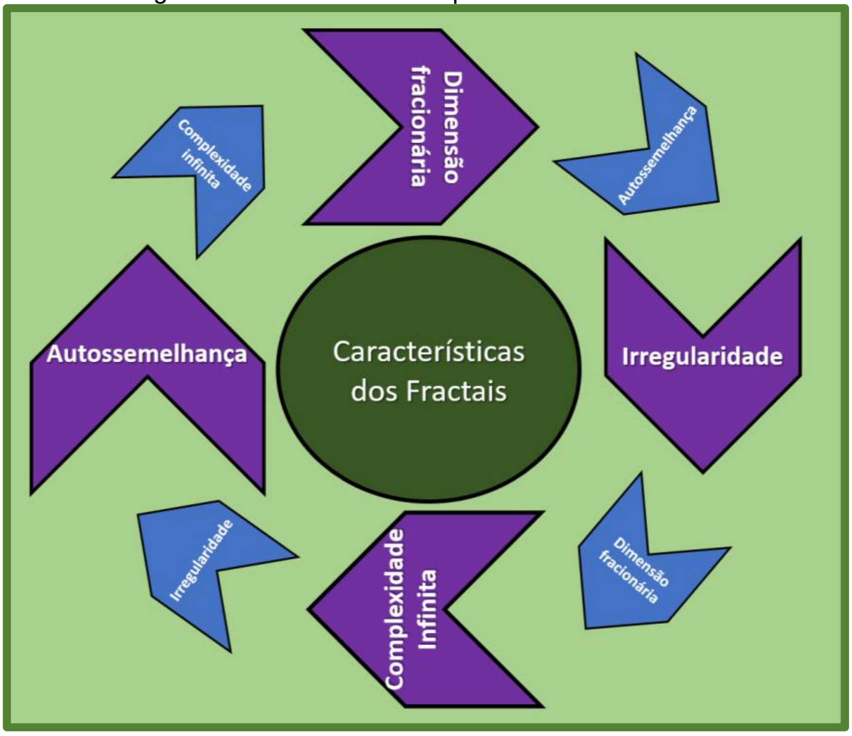
A característica de complexidade infinita presente nos fractais relaciona-se com o processo de recursividade, a chamada “iteração”, capacidade de se autorregenerar e de se repetir infinitamente (NUNES, 2006; RABAY, 2013; MODESTO, 2015; LUZ, 2016; MENDES JUNIOR, 2017). Ampliando-se um fractal, é possível perceber que ele se repete infinitamente, por meio do processo de recursividade infinita.

Já a irregularidade presente nessas estruturas refere-se às suas características não euclidianas, compondo formas consideradas “quebradas”, “rugosas” ou simplesmente irregulares. Contudo, em meio à irregularidade, pode-se, na verdade, perceber um padrão (BARBOSA, 2005; RABAY, 2013; ARAÚJO, 2014; MODESTO, 2015; LUZ, 2016; MENDES JUNIOR, 2017).

A característica de dimensão fracionária, de forma sucinta, refere-se ao fato de que a dimensão dos fractais não pertence ao conjunto dos números inteiros; eles são maiores do que a sua dimensão topológica (FALCONER, 1990). De acordo com Mendes Júnior (2017, p. 24), “grande parte dos objetos fractais possuem dimensão não inteira. Essa dimensão quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade, fragmentação ou intensidade do conjunto em questão”.

Um fractal formado por segmentos de retas, como o fractal da Curva de Koch, por exemplo, possui dimensão topológica 1, pois se trata de uma figura formada por segmentos de reta. Porém, a dimensão desse fractal é dada por 1,285 (GOUVEA, 2005). Dessa forma, a dimensão fractal está inserida no conjunto dos números racionais ou até dos irracionais. Com base em Falconer (1990), Barbosa (2005), Gouvea (2005), Gomes (2010), Rabay (2013), Araújo (2014) e Dalpiaz (2016), entre outros autores, na figura 1, buscamos esquematizar as características que definem um fractal.

Figura 1 – Características que definem um fractal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

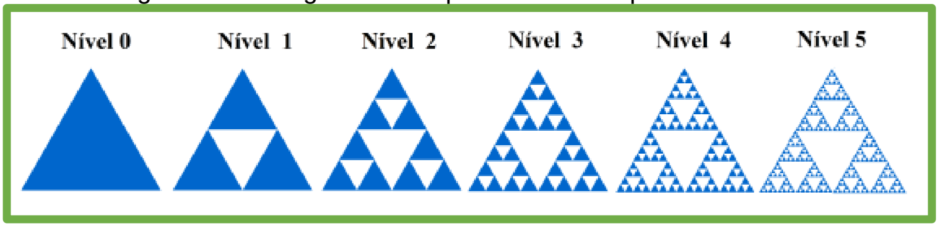
A sintetização das características de um fractal, ilustrada na figura 1, remete as quatros características que contemplam a definição de um fractal (autossemelhança, complexidade infinita, irregularidade e dimensão fracionária), podendo ser evidenciadas com maiores ou menores intensidades dependendo do fractal. Entendemos que, ao analisar essas características ou ao orientar os estudantes da Educação Básica quanto a elas, torna-se possível identificar diversos fractais presentes no contexto humano e até construir novas dessas estruturas. Porém, para essa construção, principalmente no caso dos fractais clássicos, faz-se necessário também observar a sua estrutura de formação, o que geralmente obedece a uma regra estabelecida por aquele que a estudou.

Os fractais clássicos são aqueles que tiveram notável repercussão ao longo da história. Como exemplo desse tipo de fractais, temos o fractal de Dürer, de Peano, de Cantor, de Sierpinski e de Hilbert, entre outros. Esses fractais levam o nome dos respectivos matemáticos que os estudaram. Por exemplo, o fractal de Dürer foi estudado por Albrecht Dürer (1471-1528); o fractal de Peano, por Giuseppe Peano (1858 - 1932); os fractais de Sierpinski, por Waclaw Sierpinski (1882 - 1969). Geralmente, tais fractais são classificados de acordo com as suas características de estrutura, construção ou aparência (BAIER, 2005; RABAY, 2013; DALPIAZ, 2016).

Neste trabalho, apresentaremos os fractais clássicos do tipo remoção, fronteira, árvore (ou ramificação), dentre outros que são considerados por muitos autores como os fractais clássicos. Descreveremos a sua estrutura de formação ou os passos para a sua construção, por meio de níveis finitos. Contudo, salientamos que, geralmente, os fractais apresentam estruturas que se repetem infinitamente – essa característica da complexidade infinita está presente em grande parte dessas estruturas.

O triângulo de Sierpinski é um exemplo de fractal do tipo remoção, que pode ser construído por meio de um triângulo, em que, a cada nível, é retirado um triângulo inscrito, gerado pelos pontos médios relativos a seus lados, como é possível visualizar na figura 2.

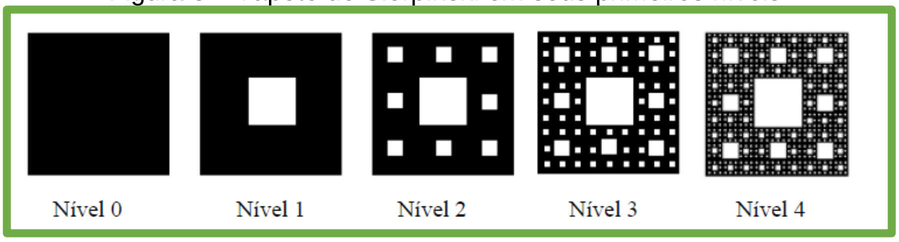
Figura 2 – Triângulo de Sierpinski em seus primeiros níveis.



Fonte: Rabay (2013).

O tapete de Sierpinski, mostrado na figura 3, é outro exemplo de fractal do tipo remoção. Com o mesmo procedimento adotado no triângulo de Sierpinski, ele é formado retirando um quadrado central da figura inicial. Em cada novo nível, esse processo é repetido de forma a que o nível subsequente seja autossemelhante em relação ao anterior.

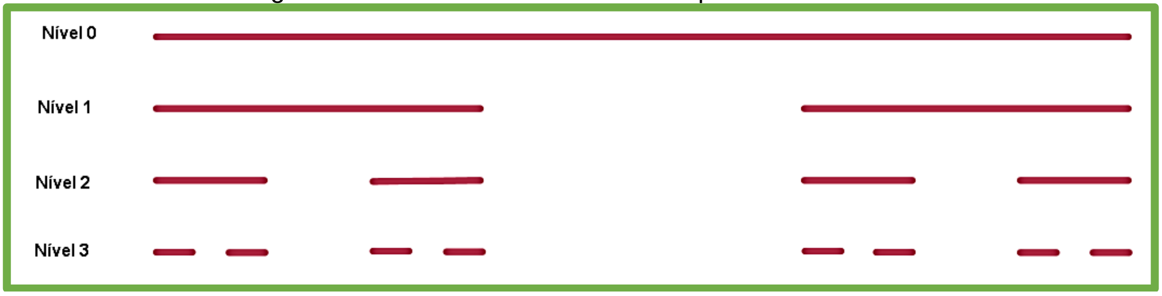
Figura 3 – Tapete de Sierpinski em seus primeiros níveis.



Fonte: Mendonça (2016).

O fractal de Cantor também é classificado como fractal do tipo remoção, obtido por meio da remoção de suas partes. Podemos gerar esse fractal da seguinte maneira: consideramos um segmento de reta inicial; retiramos a sua terça parte central no nível seguinte e repetimos o processo nos níveis seguintes. Dessa forma, obtemos o fractal mostrado na figura 4.

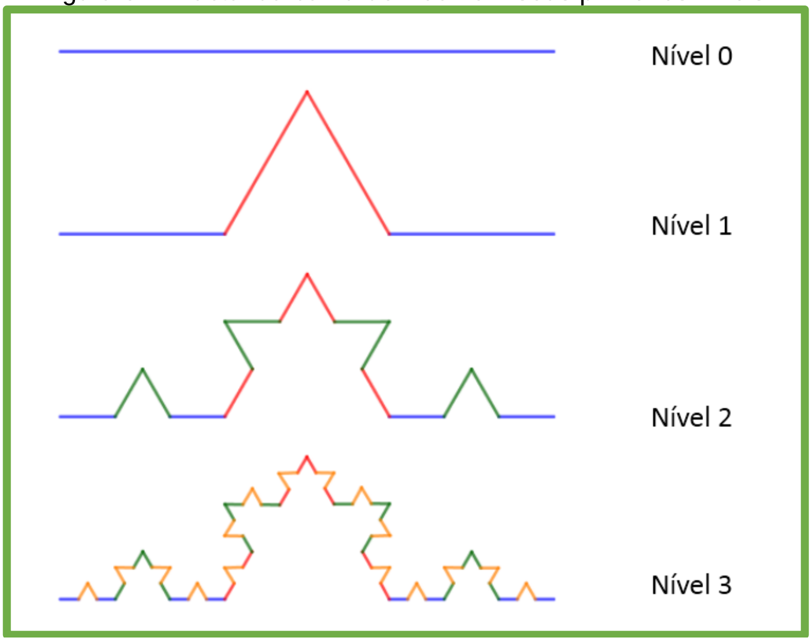
Figura 4 – Fractal de Cantor em seus primeiros níveis.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Já o Fractal da curva de Koch é considerado um dos fractais do tipo fronteira. Ele é gerado da seguinte maneira: consideramos um segmento de reta e dividimo-lo em três partes iguais. Em seguida, retiramos a parte central e substituímos o segmento retirado por dois segmentos do mesmo tamanho antes retirado. Depois, repete-se o processo continuamente, obtendo-se o fractal da figura 5:

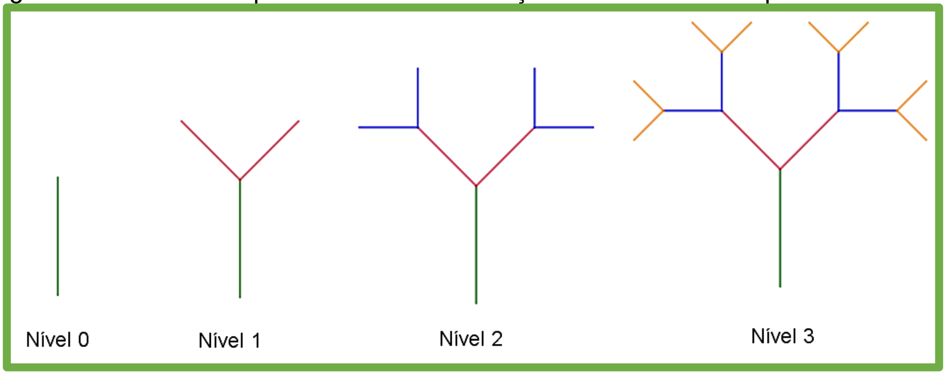
Figura 5 – Fractal da curva de Koch em seus primeiros níveis.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os fractais obtidos por processos iterativos de inserção de ramificações são conhecidos como os fractais do tipo árvore, pois eles se assemelham a uma árvore, com um tronco e galhos (ramificações). Para a geração da árvore bifurcada, por exemplo, consideramos uma reta horizontal (que será o tronco do fractal); depois, desenhamos dois segmentos formando ângulos proporcionais de bifurcação entre eles e simétricos ao segmento anterior. Por último, repetimos esse processo quantas vezes forem possíveis. O resultado é apresentado na figura 6.

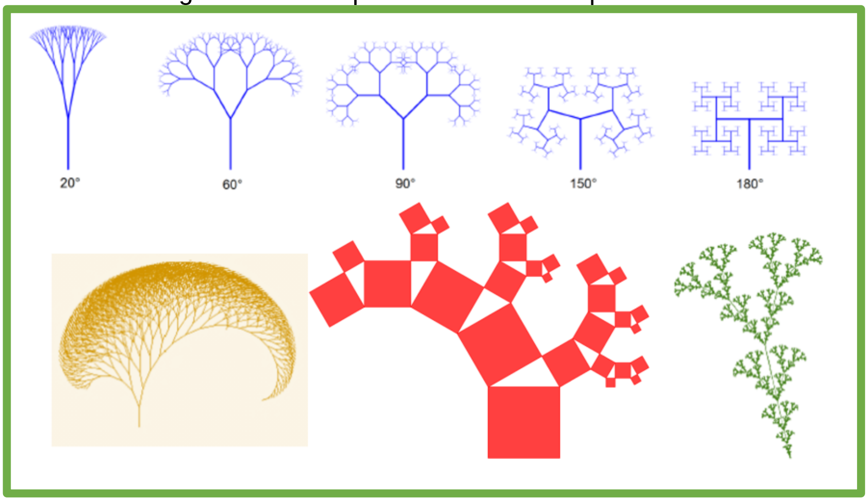
Figura 6 – Fractal do tipo Árvore com bifurcação em 90º em seus primeiros níveis.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Existem ainda outras variações desse tipo de fractal. Alterando-se o ângulo de bifurcação dos galhos dessa estrutura, a quantidade de inserção de galhos ou o troco do fractal, por exemplo, obtém-se a árvore pitagórica. Vejamos outros exemplos do fractal do tipo árvore na figura 7.

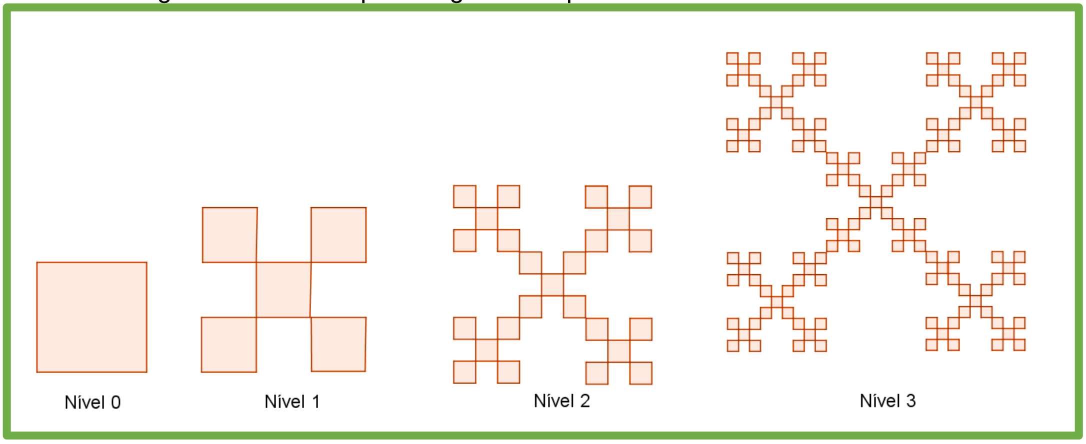
Figura 7 – Exemplos de fractais do tipo árvore.



Fonte: Nunes (2006) e Rabay (2013).

Os fractais clássicos do tipo Dürer são aqueles formados com base em polígonos regulares. Um exemplo desse tipo de fractal é o quadrangular do tipo Dürer (figura 8). Esse fractal possui como base um quadrado e, em cada nível, inserimos um quadrado ou a figura anterior no vértice mais extremo do nível subsequente.

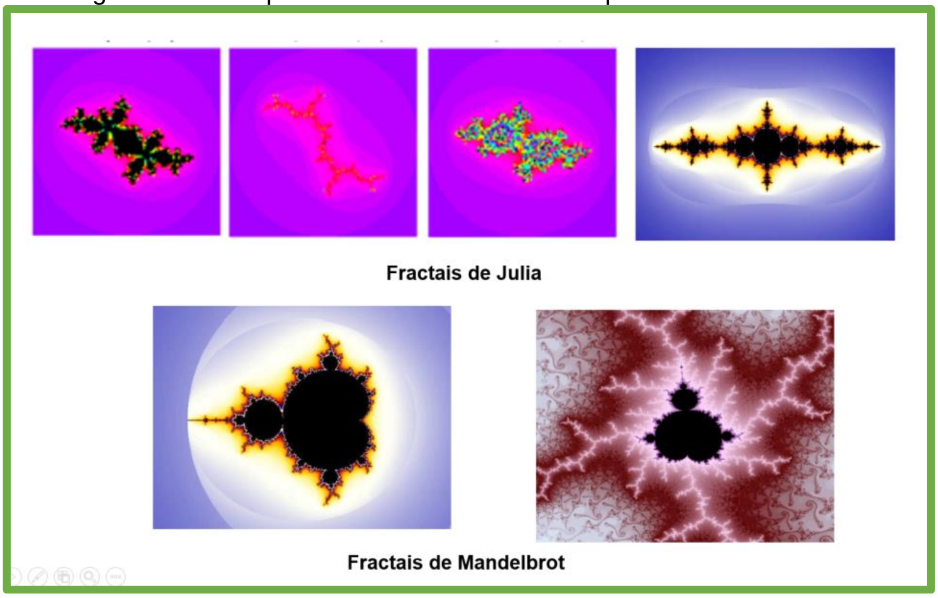
Figura 8 – Fractal quadrangular do tipo Dürer em seus níveis iniciais.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Além desses fractais clássicos, existem ainda os fractais clássicos de Julia e de Mendelbrot, que levam o nome dos matemáticos Gaston Maurice Julia (1893-1978) e Benoit Mandelbrot (1924-2010). Tais fractais são gerados apenas por recursos computacionais. Alguns exemplos podem ser vistos na figura 9.

Figura 9 – Exemplo de fractais clássicos do tipo Julia e Mandelbrot.



Fonte: Baptista (2013) e Rabay (2013).

Salientamos que estes são alguns dos fractais clássicos mais conhecidos. Porém, como indica Barbosa (2005), mais do que conhecer esses fractais ou visualizá-los, é interessante que os alunos da Educação Básica construam ou criem novos fractais, baseando-se nas estruturas clássicas. Para isso, salientamos que é necessário observar se esses novos fractais atendem a características básicas apresentadas anteriormente – autossemelhança, complexidade infinita, irregularidade e dimensão fracionária.

2.2 Práticas de ensino com os fractais na Educação Básica

A geometria Fractal, segundo Mendonça (2016), é conhecida como a “geometria da natureza”. Como comenta Mandelbrot (1977, p. 1), “muitos padrões da natureza são tão irregulares e fragmentados” que só podem ser associados a geometria Fractal. Além de essas formas apresentarem imagens intrigantes, que chamam a atenção dos alunos da Educação Básica, seu estudo tem ampliado a visão dos estudantes para o mundo à nossa volta e mostrado diversas aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento.

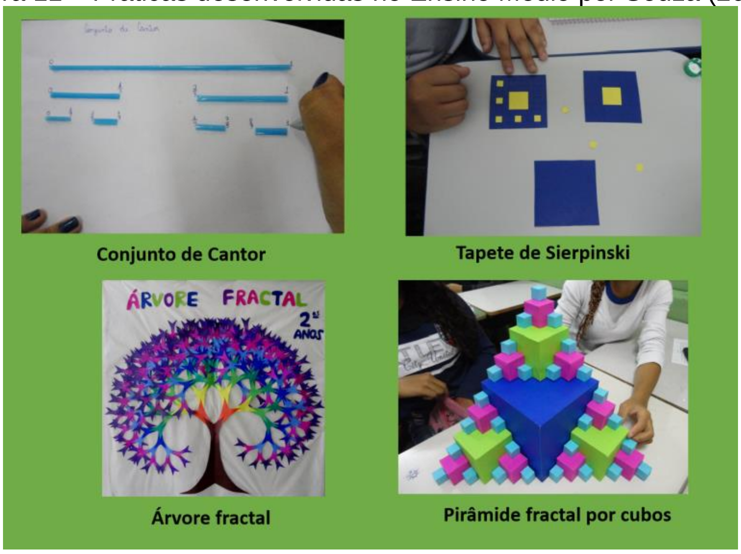
Um exemplo de estudo dos fractais apresentado por meio da observação das formas irregulares da natureza, que pode ser fonte de inspiração para outras práticas com fractais presentes na realidade imediata dos alunos, são as práticas desenvolvidas por Reis (2014). Este professor e pesquisador levou a sua turma para um mangue, praia da cidade onde ele trabalhava, e orientou os alunos a observarem e a coletarem objetos que fossem irregulares, mas nos quais fosse possível identificar um padrão, ou seja, que fosse possível associar a um fractal. Os alunos fizeram observações nas paisagens e coletaram conchas da praia como exemplo de tais objetos. Depois, em sala de aula e com o auxílio do *datashow,* eles identificaram os padrões existentes nas conchas encontradas, discutiram sobre a presença dessas e de outras formas irregulares presentes na natureza e buscaram analisar outros padrões a partir das formas encontradas na prática. Alguns registros desta prática podem ser observados a figura 10.

Figura 10 – Alunos do Ensino Médio observando fractais em seu cotidiano.

Fonte: Reis (2014).

Vários materiais didáticos manipuláveis também são utilizados para o estudo dessas formas. Souza (2014), por exemplo, desenvolveu um projeto de ensino intitulado de “Geometria Fractal para alunos de Ensino Médio”, no qual foram desenvolvidas diversas atividades com materiais manipuláveis para o ensino da Matemática no Ensino Médio. Entre essas atividades, destacamos a construção de fractais com canudos, a árvore fractal com recortes de papel coloridos, o tapete de Sierpinski com papel quadriculado e a pirâmide fractal com cubos. Observemos a figura 11.

Figura 11 – Práticas desenvolvidas no Ensino Médio por Souza (2014).

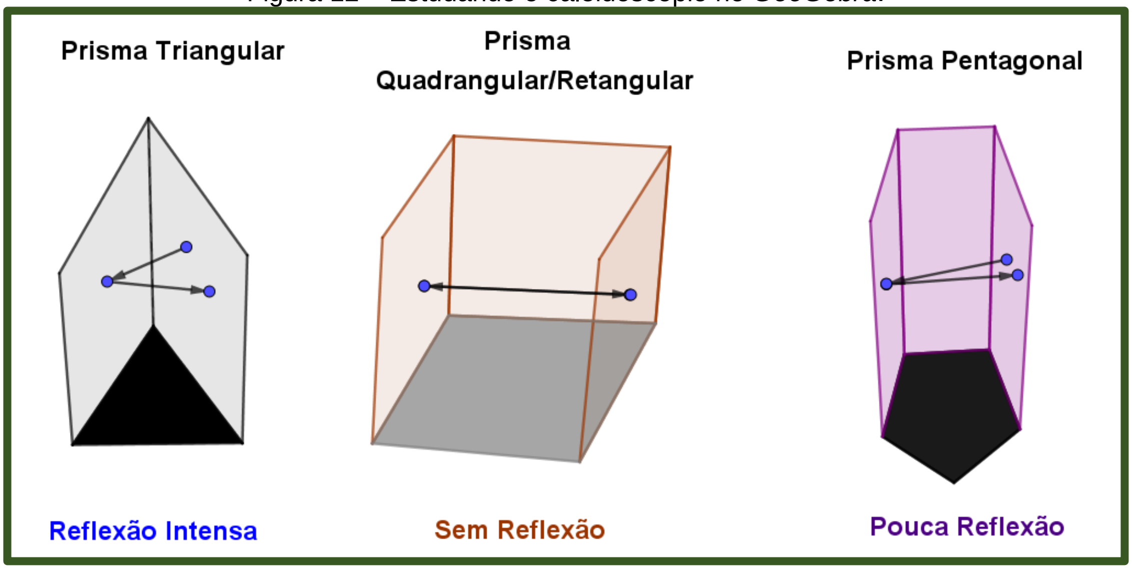


Fonte: Souza (2014).

O caleidoscópio é um outro exemplo de material didático manipulável que permite que os alunos observem fractais em seu interior (GOUVEA, 2005; MURARI, 2011; CAMPOS, 2019) e venham perceber a beleza dessas formas, conhecendo e reconhecendo as já mencionadas características dos fractais. As características de autossemelhança e complexidade infinita podem ser percebidas ao se observar que as figuras formadas no caleidoscópio são cópias da figura presente na base do caleidoscópio, repetidas infinitamente. Por outras palavras, são partes autossemelhantes da figura presente na base do prisma triangular que se repetem infinitamente, formando as imagens de diferentes fractais. Essas imagens observadas no interior do caleidoscópio apresentam ainda a característica de serem irregulares, pois geralmente não podem ser representadas pela geometria Euclidiana e a dimensão de grande parte delas não são inteiras, apresentando-se por diversas vezes formas irregulares.

Ainda segundo Souza (2014), quando se constrói esse instrumento de forma manipulativa, a estrutura envolvida, em forma de prisma triangular, pode contribuir ainda para o ensino de vários conceitos geométricos, tais como os de prismas, de simetria e de rigidez de um triângulo. Esses estudos podem ainda ser realizados utilizando o *software GeoGebra*, conforme propõe o autor. Vejamos a figura 12 a seguir.

Figura 12 – Estudando o caleidoscópio no *GeoGebra*.



Fonte: Campos (2019).

Segundo Campos (2019), além dos conhecimentos geométricos da Matemática, o estudo desse instrumento pode favorecer o desenvolvimento de trabalhos interdisciplinares entre a Matemática e a Física, como, por exemplo, estudando o processo reflexivo que ocorre dentro desse objeto apresentado acima com o uso do GeoGebra.

No que se refere a práticas de ensino da matemática com fractais na Educação Básica, várias práticas com fractais realizadas nos últimos anos têm se voltado para o uso das tecnologias digitais. Como exemplo disso, temos as práticas de construção de fractais no *GeoGebra* apresentadas por Faria (2012). Com os seus alunos, a professora e pesquisadora desenvolveu a construção dos fractais Lunda-Design, triângulo de Sierpinski e por circunferências, entre outros. Em seguida, a turma observou as sequências presente nessas estruturas. A autora (2012, p. 154) comenta que os alunos acabaram explorando, a partir dessa atividade, “áreas de quadrados, comparação entre raios de circunferências e entre segmentos, criação de expressões gerais, frações, uso de tabelas, perímetros, potências, progressões aritméticas e geométricas, sequências e teorema de Pitágoras”. De acordo com uma das estudantes que participaram da pesquisa:

> [...] À medida que a gente vai construindo, a gente vai conseguindo ver o quanto isso pode ser usado, principalmente pelas pessoas que entendem bem para trabalhar nessa área, porque eu acho bonito os desenhos e tudo. Até para um professor tentar inventar novas aulas, melhorar, tentar fazer as aulas ficarem mais produtivas”. (VIVIANE *apud* FARIA, 2012, p. 151).

Na visão dessa aluna, ao se estudar os fractais com o *software GeoGebra*, é possível construir conhecimentos Matemáticos e dinamizar o processo de ensino, tornando a aula mais atrativa e produtiva. Além disso, Viviane destaca, principalmente, o papel dos professores de Matemática, afirmando que aqueles que trabalham nessa área devem fazer uso de recursos como os fractais e o *GeoGebra*.

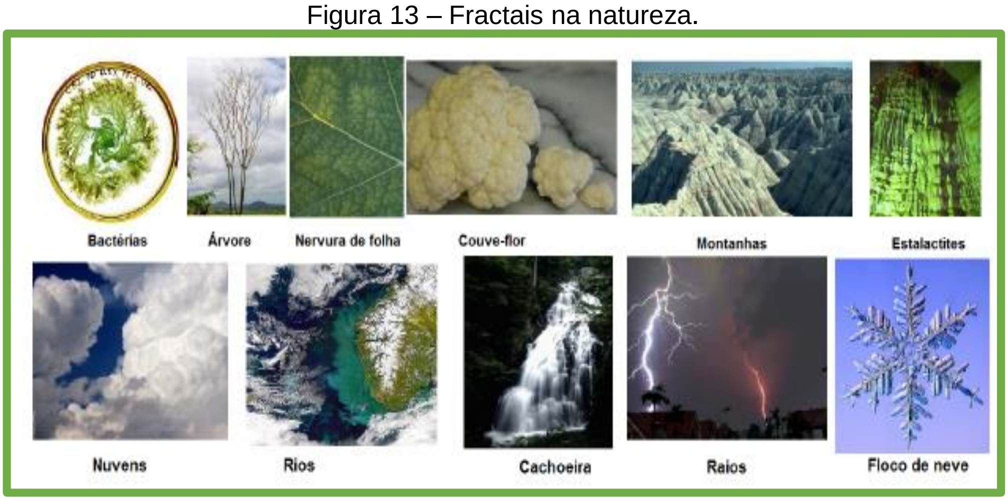
Além dessas propostas já mencionadas, salientamos que existem outras que podem ser aplicadas na Educação Básica para o ensino da Matemática. De todo modo, foram essas práticas em especial que nos nortearam para a realização do curso Enfrac, no qual buscamos compreender como abordar a geometria Fractal no ensino da Matemática para a Educação Básica – com materiais concretos, utilizando recursos tecnológicos como o *GeoGebra* e Jogos digitais de aprendizagem, entre outras percepções que poderiam emergir desse curso.

2.3 Algumas aplicações e curiosidades dos fractais

Os fractais podem ser encontrados em diversas formas da natureza e, conforme já adiantamos, têm proporcionado aplicações para as Ciências, para a tecnologia e para a própria Matemática (BARBOSA, 2005, BAPTISTA, 2013; BAGIO, 2014). Dessa forma, nesta seção, buscaremos apresentar algumas dessas aplicabilidades e curiosidades que tornam essas estruturas ainda mais fascinantes.

Para Zanotto (2015, p. 55), o estudo da geometria Fractal abre portas para o conhecimento das formas de crescimento de muitas plantas, folhas e frutos que antes não podiam ser estudados. É o que mostram os trabalhos de Schwingel (2016) sobre o crescimento da samambaia de Barnsley e de Borges (2017), intitulado “Cálculo da dimensão fractal do sistema vascular de folhas do cerrado”. Além disso, os comportamentos irregulares, que estão na base da geração dos fractais, podem ser estudados por meio do acompanhamento da vida das bactérias e da observação das formas de algumas montanhas, relâmpagos, nuvens e flocos de neve, entre outros fenômenos e representações da natureza, como apresentado na figura 13.

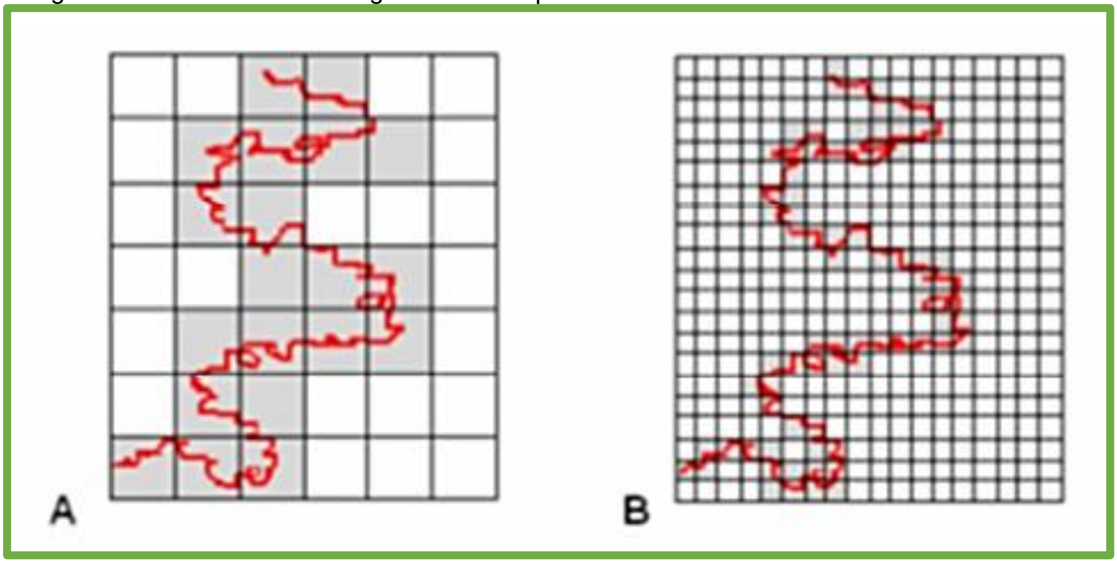
Figura 13 – Fractais na natureza.



Fonte: Rabay (2013).

Entre outros estudos envolvendo os fractais na natureza, destacamos o de Baptista (2013, p. 51), que apresenta o cálculo realizado para dimensionar as costeiras terrestres, o que pode ser feito por meio do método de “contagem de caixas” ou utilizando o fractal da curva de Koch (ver figura 5). Para esse método, é utilizada a manipulação computacional com base nesse fractal. Vejamos a figura 14 a seguir.

Figura 14 – Método de contagem de caixa para o cálculo da dimensão de linhas costeiras.

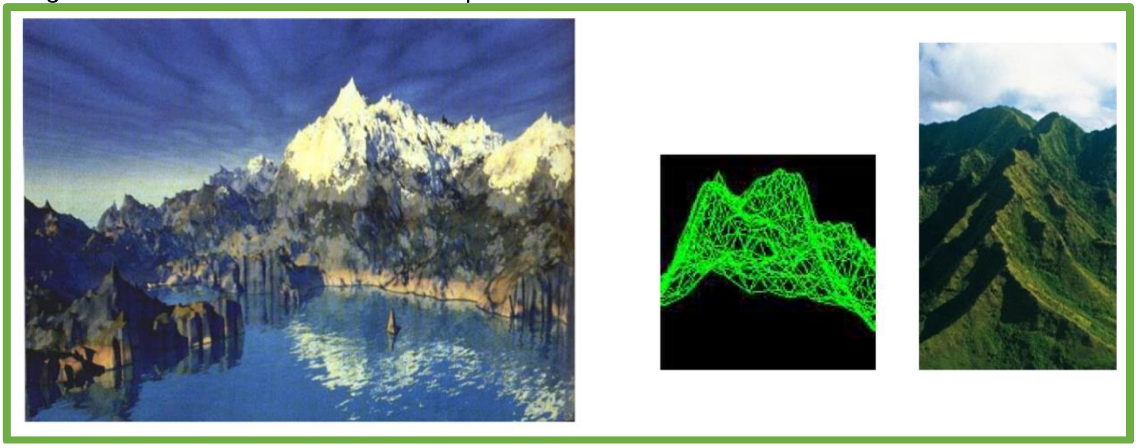


Fonte: Baptista (2013).

Entre outros estudos geológicos, Baptista (2013, p. 50) aponta o método utilizado para estimar a “dimensão fractal da massa dos poros da superfície de solos arenosos e lodosos”, a diversidade da microflora e microfauna que estão presentes em “falhas geológicas, terremotos, erupções vulcânicas e depósitos minerais e de petróleo”. Além disso, os fractais podem ser utilizados para estudar a fragmentação do solo e as propriedades de percolação e retenção de água.

Fora do domínio da natureza, os fractais estão sendo estudados e utilizados em imagens, jogos, filmes e animações digitais. Isso tem um impacto direto na qualidade de representações de paisagens e de ambientes virtuais que remetem à natureza, tais como rios, montanhas e nuvens. Vejamos a figura 15, apresentada por Baier (2005) e Schwingel (2016).

Figura 15 – Tela e ambiente virtuais que remetem à natureza criados com base nos fractais.



Fonte: Baier (2005) e Schwingel (2016).

Além de os estudos sobre a geometria Fractal estarem ligados à natureza, os fractais possuem uma íntima relação com a chamada “Teoria do Caos”. Sobre essa teoria, Fey e Rosa (2012) afirmam:

> Imagine que, no passado, você tenha perdido o vestibular da faculdade de seus sonhos porque um prego furou o pneu de seu ônibus. Desconsolado, você entra em outra universidade. Então, as pessoas com quem você vai conviver serão outras, seus amigos vão mudar, os amores serão diferentes seus filhos e netos podem ser outros... No final, sua vida se alterou por completo, tudo por causa de um prego no início dessa sequência de eventos. (FEY; ROSA, 2012, p. 218).

Com base na analogia que se estabelece a partir desses exemplos, podemos afirmar que quase tudo que acontece no universo é imprevisível e irregular. As aglomerações estrelares, o ritmo dos batimentos cardíacos ou a movimentação inconstante das cotações das bolsas de valores. De forma ampla, podemos dizer que a desordem e a irregularidade aparecem em toda a parte. Porém, de acordo com Fey e Rosa (2012), vários sistemas caóticos do mundo apresentam uma estranha ordem, um padrão em determinados sistemas irregulares.

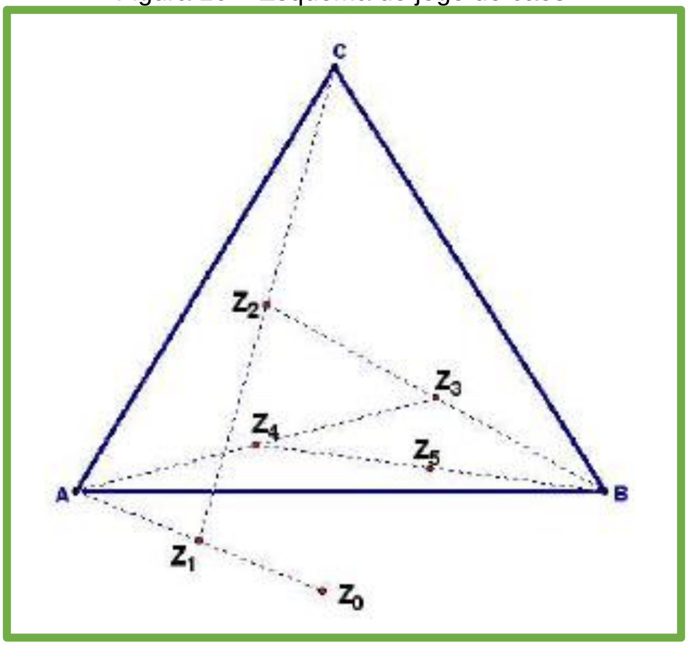
Esse aparente contrassenso (da regularidade entremeio ao caos) foi o que Mandelbrot percebeu nos problemas computacionais de ruídos telefônicos na empresa que ele trabalha, o Centro de Pesquisa Thomas Watson (BARBOSA, 2005). Além disso, o matemático identificou uma série de dados caóticos na flutuação de preços de algodão (MENDONÇA, 2016). Em ambos os casos, Mandelbrot utilizou os estudos dos fractais para lidar com esses problemas ou prever os acontecimentos.

Ainda em relação a essa desordem característica dos fractais, Barbosa (2005), Nunes (2006) e Rabay (2013), entre outros autores, comentam sobre o jogo do caos[2]. Tal jogo pode ser desenvolvido da seguinte forma:

- ✓ em um triângulo qualquer, marcam-se os vértices A, B e C;
- ✓ escolhe-se e marca-se um ponto (Z_0) no interior ou no exterior desse triângulo;
- ✓ com o auxílio de um dado (de seis faces) e com as suas faces identificadas, duas a duas, com as letras A, B e C, sorteia-se uma das letras do e marcam-se os pontos médios (Z_1, $Z_2, Z_3, \ldots$), em relação ao vértice sorteado, e cada novo ponto marcado inicialmente (ou anteriormente).

Conforme a marcação dos pontos vai ocorrendo, de forma natural, o fractal do triângulo de Sierpinski vai se definindo. Para a melhor compreensão desses passos, observemos, na figura 16, a sistematização feita por Nunes (2006).

Figura 16 – Esquema do jogo do caos.

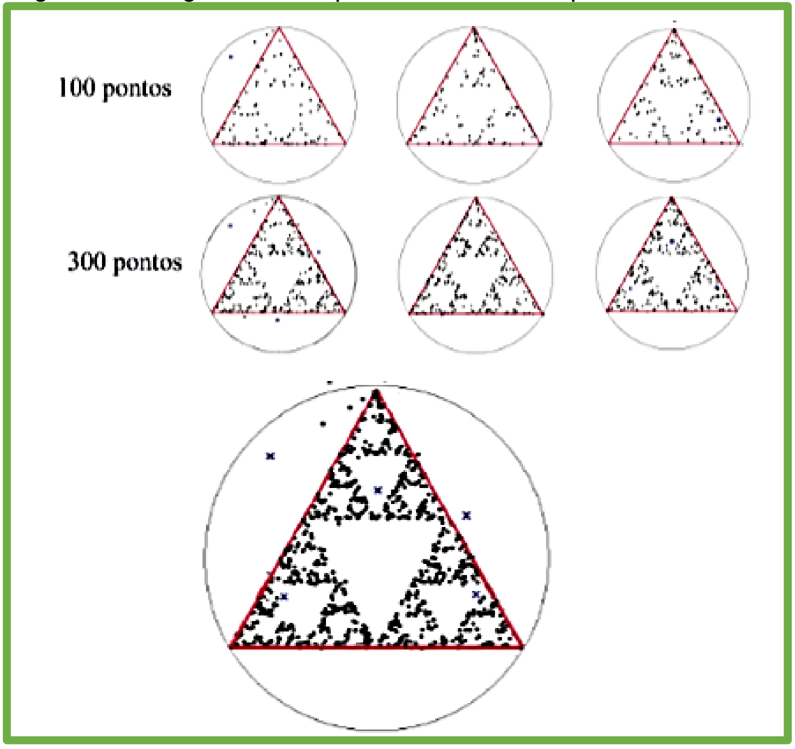


Fonte: Nunes (2006).

Rabay (2013) apresenta algumas das atividades realizadas por seus alunos ao jogarem esse jogo à mão. Vejamos a figura 17.

[2]O trabalho “Os fractais que nos rodeiam”, de Campos e Fagundes (2018a), que pode ser acessado no *site* “É Hora da Matemática”, também trata desse jogo. Disponível em: https://sites.google.com/view/horadamatemtica/p%C3%A1gina-inicial. Acesso em: 20 out. 2019.

Figura 17 – Jogo do caos após 100, 300 e 500 pontos marcados.



Fonte: Rabay (2013).

Além dessas aplicações e curiosidades, o estudo dos fractais tem aplicações, entre outros, no ramo da Arquitetura, como apresenta Sedrez (2009), nos estudos envolvendo fluídos, como o proposto por Barbosa *et al*. (2015), e, ainda, no estudo de timbres acústicos realizado por Batista (2016).

Em seu estudo, Sedrez (2009) mostra que vários monumentos de construções arquitetônicas e artísticas apresentam características dos fractais. Já no estudo de Barbosa *et al.* (2015), os autores utilizaram o fractal do tapete de Sierpinski para desenvolver seus estudos sobre a viscosidade de fluídos. No caso de Batista (2016), além de abordar as oscilações caóticas e ramificadas presentes em vários instrumentos musicais, o autor busca desenvolver um vídeo com músicas africanas para serem apresentadas no contexto da Educação Básica, contemplando os dispositivos da Lei n.º 10.639/2003, que "estabelece diretrizes para do ensino de História e Cultura Africana e Afro-Brasileira no ensino brasileiro" (BATISTA, 2016, p. 2).

Portanto, podemos constatar que os fractais estão presentes de várias formas no nosso cotidiano e que, em muitos casos, elas representam melhor as diversas irregularidades geométricas e caóticas encontradas no mundo à nossa volta. Além disso, o estudo dessas estruturas está presente em várias Ciências, como, por exemplo, na Engenharia, na Química, na Biologia, na Matemática e em representações tecnológicas, desenvolvendo e contribuindo para pesquisas de diversas áreas do conhecimento.

Assim, mais do que desenvolver e apresentar conceitos matemáticos, estudar os fractais na Educação Básica, mesmo que de forma introdutória, apresentando as características que definem essas estruturas, permite o desenvolvimento de habilidades de reconhecimento das formas à nossa volta. De fato, estudar no contexto da Matemática as formas irregulares e quebradas presentes no mundo pode significar um aprendizado importante para os alunos. Eles poderão visualizar tais formas em diferentes espaços, compreender melhor algumas das formas fractais presentes na natureza e reconhecer essa geometria em suas atividades corriqueiras.

No intuito de apresentar o caminho percorrido pelos pesquisadores no desenvolvimento metodológico deste trabalho, no capítulo seguinte, serão descritos os procedimentos de produção e coleta de dados, os instrumentos e a metodologia de análise, assim como os sujeitos, as formas de identificação deles no trabalho, a sua relevância para a pesquisa, as suas especificidades, a metodologia de ensino adotada e o ambiente em que a pesquisa foi realizada.

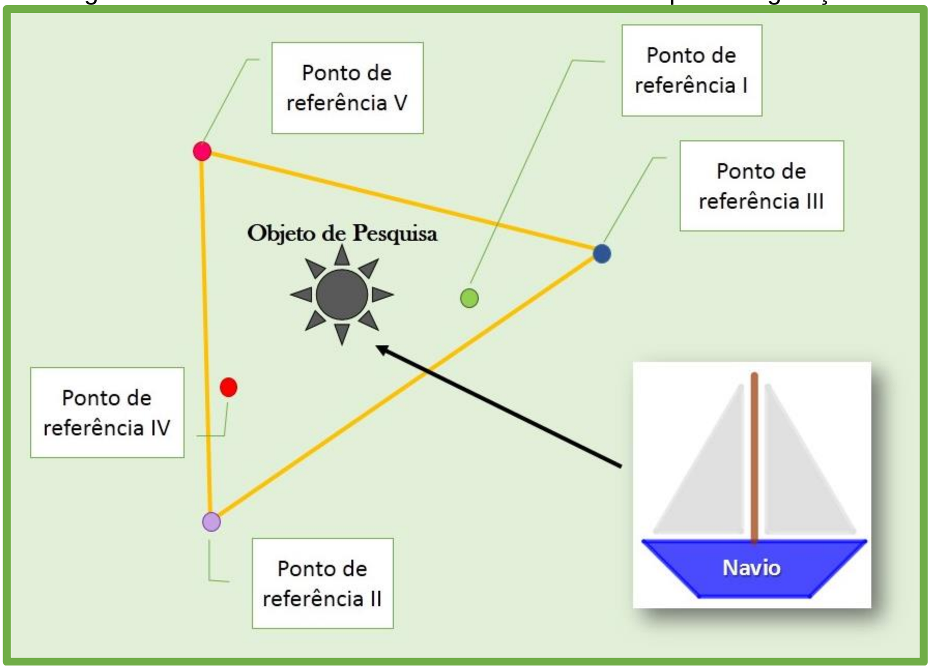
3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Para a realização desta pesquisa e para a produção e análise dos dados, utilizaremos a abordagem qualitativa e a triangulação. De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 16), as pesquisas de abordagem qualitativa “não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis” ou de cálculos estatísticos. Por outro lado, mostram “diversas perspectivas que variam desde o pensamento de justiça social até perspectivas ideológicas, posturas filosóficas e posturas procedurais sistemáticas” (CRESWELL, 2009, p. 2006). Já a análise dos dados por triangulação consiste em uma “combinação de metodologias diversas no estudo do mesmo fenômeno”, que possui como objetivo “abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo” (GOLDEMBERG, 2004, p. 63).

Na abordagem qualitativa, os instrumentos de pesquisa utilizados baseiam-se em “textos e imagens, têm passos singulares na análise de dados e se valem de diferentes estratégias de investigação” (CRESWELL, 2009, p. 206). A triangulação “prevê os diversos ângulos de análises, as diversas necessidades de recortes” e pontos de observação diferenciados, de modo que a visão do investigador “não seja limitada e o resultado não seja restrito a uma única perspectiva” (TUZZO; BRAGA, 2016, p. 141).

O termo “triangulação”, segundo Goldemberg (2004, p. 63), “é uma metáfora tomada emprestada da estratégia militar e da navegação, que se utilizam de múltiplos pontos de referência para localizar a posição exata de um objeto”. Dessa forma, busca-se, com a utilização desses diversos instrumentos ou pontos de referências, abranger a amplitude das informações trazidas pelos dados coletados, chegando a uma maior compreensão do objeto de estudo. Procuramos esquematizar a metáfora da análise por triangulação apresentada por Goldemberg (2004), na figura 18.

Figura 18 – Forma sintetizada da análise de dados por triangulação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019) a partir de Goldemberg (2004).

Na figura 18, o navio representa o pesquisador, que possui como objetivo guiar-se até o objeto de pesquisa. O objeto de pesquisa, por sua vez, está localizado no interior desse triângulo e representa o foco da pesquisa, o objetivo da sua realização. Já as bolas coloridas indicam alguns pontos de referências ou instrumentos de análises necessários para guiar o pesquisador até as respostas. O triângulo é uma representação do ambiente em que o pesquisador pode encontrar tais respostas, ambiente onde estão os sujeitos de pesquisa e/ou o local onde o pesquisador deve se mover, elaborando hipóteses, observando, instigando os sujeitos, construindo ou desconstruindo conceitos.

Com base nisso, na pesquisa qualitativa, temos que a triangulação utiliza três ou mais pontos de referência para direcionar o pesquisador ao objeto de pesquisa e para dar confiabilidade aos dados produzidos. Amplia-se, assim, "o universo informacional em torno do objeto de pesquisa" e favorece-se a percepção do pesquisador sobre a "totalidade acerca do objeto de estudo" (MARCONDES; BRISOLA, 2014, p. 203).

Nesta pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos: imagens, vídeos, áudios, materiais (ou recursos) didáticos produzidos pelos cursistas durante o Enfrac e três questionários semiestruturados (A, B e C, disponível no

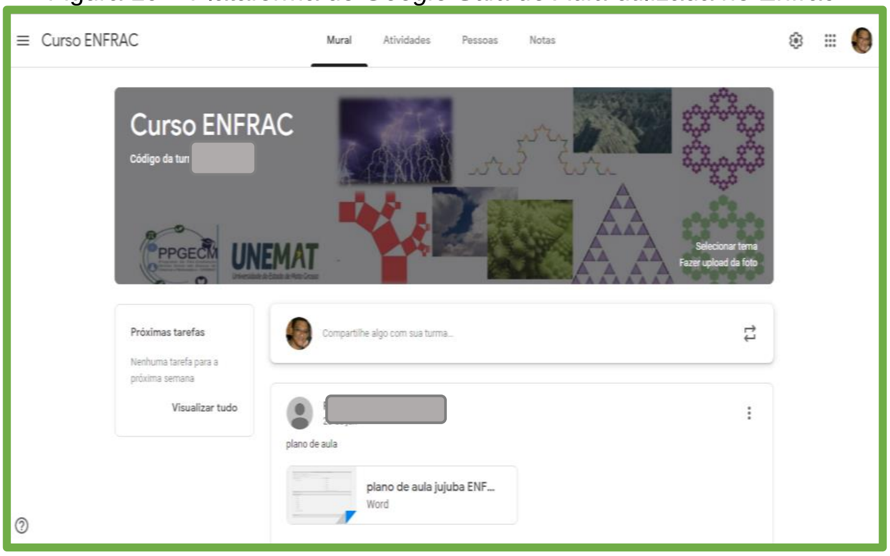
Apêndice). Com base nesses instrumentos, buscamos uma aproximação em relação ao objeto de pesquisa.

3.1 O ambiente e os sujeitos de pesquisa

Visto que o objetivo deste trabalho consistiu em compreender como abordar a geometria Fractal no ensino da Matemática para a Educação Básica, propusemos o curso “Ensino da Matemática com Fractais”, o já referido Enfrac. Este curso foi destinado a professores de Matemática e de Pedagogia que atuam no ensino desse componente curricular e realizado de forma híbrida, com aulas presenciais e *online.* As aulas semipresenciais foram realizadas no *campus* da Unemat de Barra do Bugres, e as *onlines* ocorreram por meio da plataforma do *Google Sala de Aula* (ou *Google Classroom*).

O ensino híbrido “é considerado como um programa de educação formal, no qual o aluno aprende, em parte, por meio do ensino *online* e, em parte, em uma localidade física supervisionada, fora da sua residência” (CUNHA, 2018, p. 28). Dessa forma, no curso Enfrac, buscamos combinar aulas presenciais com aulas à distância. A figura 19 apresenta a plataforma utilizada para as aulas *online*.

Figura 19 – Plataforma do *Google Sala de Aula* utilizada no Enfrac.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em se tratando do ensino híbrido, misturado, mesclado ou *blended*, Bacich e Moran (2015) afirmam que:

> A educação sempre foi misturada, híbrida, sempre combinou vários espaços, tempos, atividades, metodologias, públicos. Agora esse processo, com a mobilidade e a conectividade, é muito mais perceptível, amplo e profundo: trata-se de um ecossistema mais aberto e criativo. O ensino também é híbrido, porque não se reduz ao que planejamos institucionalmente, intencionalmente. Aprendemos através de processos organizados, junto com processos abertos, informais. Aprendemos quando estamos com um professor e aprendemos sozinhos, com colegas, com desconhecidos. Aprendemos intencionalmente e aprendemos espontaneamente. (BACICH; MORAN, 2015, p. 1).

Dessa forma, "o modelo híbrido destaca a flexibilidade, a mistura e o compartilhamento de espaços, tempos, atividades, materiais, técnicas e tecnologias" (MORAN, 2017, p. 73). Tal modelo faz uso de recursos físicos, digitais e móveis, com elementos que trazem inúmeras possibilidades de combinações e arranjos de itinerários para as atividades realizadas (MORAN, 2017).

No Enfrac, buscamos apresentar aos cursistas práticas de ensino da Matemática com fractais utilizando recursos manipuláveis e digitais. Nelas, os participantes foram instigados a avaliar as práticas do curso e a buscar conteúdos desse componente curricular para serem abordadas com alunos da Educação Básica. Para isso, além de registrarmos a interação dos cursistas durante as atividades do curso por meio de vídeos, fotos e gravação de áudios, aplicamos dois questionários semiestruturados, no intuito de ampliar as nossas percepções sobre o objetivo de pesquisa.

De acordo com Lüdke e André (2007, p, 33) "o trabalho de pesquisa em educação aproxima-se dos esquemas mais livres e menos estruturados", permitindo aos colaboradores de pesquisa apresentar suas ideias de forma espontânea, "criando uma atmosfera de influência e cumplicidade recíproca" (MARIANI, 2010, p. 23) entre o entrevistador e o entrevistado, o que pode conferir um grau de maior veracidade e credibilidade às informações descritas. Dessa forma, aplicamos três questionários em diferentes momentos para os cursistas Enfrac, um de forma *online* e os outros dois de forma física (impresso). Principalmente nos dois últimos, elaboramos questões totalmente "abertas" (com respostas subjetivas), nas quais os sujeitos pudessem se expressar com mais liberdade.

O primeiro questionário, apresentado aos participantes de forma digital, buscou coletar os dados pessoais dos cursistas – assim, houve perguntas sobre a formação acadêmica, a localidade de origem, os conhecimentos prévios sobre os fractais, o *software GeoGebra* e a tecnologia que utilizaríamos no curso Enfrac.

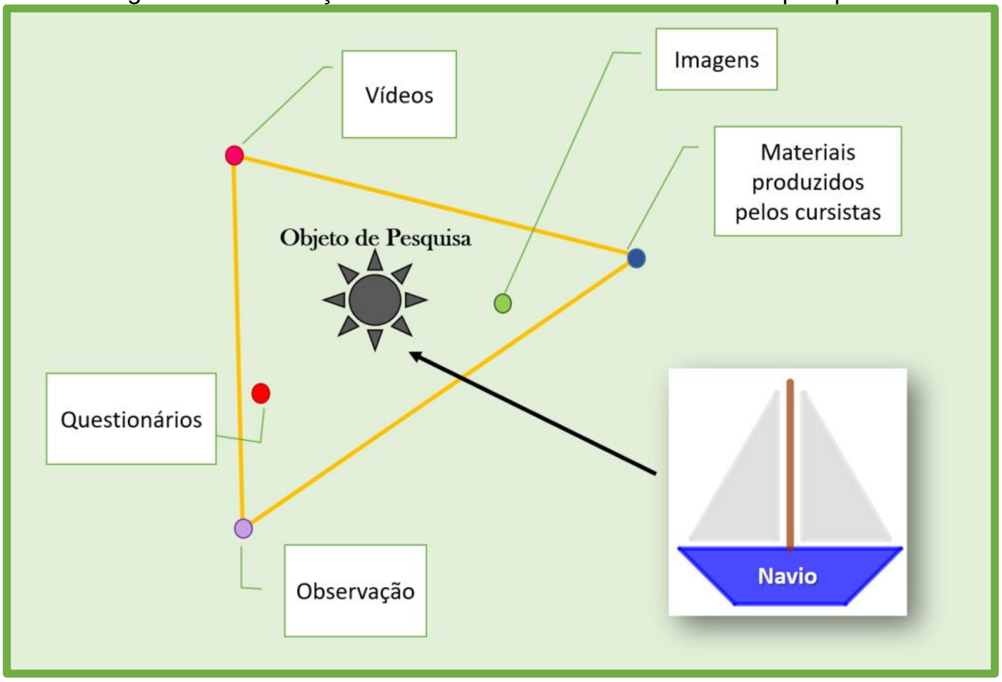
Já o segundo e o terceiro questionários, que foram apresentados aos cursistas em material impresso ao final das aulas presenciais, destinaram-se à avaliação do curso e à identificação das percepções dos cursistas quanto ao ensino da Matemática com os fractais para a Educação Básica. Um questionário foi destinado a respostas individuais e o outro, a respostas em grupo[3]. No intuito de manter o sigilo de pesquisa, proteger os sujeitos e dar liberdade para que eles se expressassem, os cursistas foram identificados, no segundo questionário (Apêndice B), como M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, P1 e P2. Essa nomenclatura faz alusão à formação acadêmica em Matemática (M) ou em Pedagogia (P).

No terceiro questionário (Apêndice C), os cursistas foram divididos em três grupos, de acordo com os diferentes níveis da Educação Básica: Ensino Fundamental Anos Iniciais (Efai), Ensino Fundamental Anos Finais – (Efaf) e Ensino Médio (EM). Eles foram identificados do seguinte modo: grupo 1 – Efai; grupo 2 – Efaf; e grupo 3 – EM.

Assim, conforme ilustrado na figura 20, destacamos como instrumentos de análise dos dados, a observação das resoluções e interações dos cursistas com as atividades propostas no curso, os materiais produzidos pelos cursistas, vídeos e imagens registrados por nós, durante o processo de pesquisa e três questionários aplicados em diferentes momentos do curso.

[3]Esses questionários estão disponíveis, respectivamente, nos Apêndices A, B e C deste trabalho.

Figura 20 – Ilustração da análise dos dados realizada na pesquisa.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na seção seguinte descreveremos como ocorreu a produção dos dados da pesquisa e, em seguida, apresentaremos os resultados obtidos.

4 O CURSO ENFRAC E A PRODUÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA

O Enfrac ocorreu de forma semipresencial, conforme já mencionado. As aulas presenciais ocorreram no *campus* da Unemat de Barra do Bugres, e as atividades à distância foram mediadas pela plataforma do *Google Sala de Aula*. Ao todo, a carga horária foi de 30 horas, distribuídas no período de 1.º a 30 de junho de 2019. O curso foi organizado em dois módulos presenciais de seis horas cada, realizados no primeiro e no último sábados do mês.

O primeiro contado com os alunos ocorreu de forma *online*, por meio da plataforma do *Google Sala de Aula*. Via *e-mail*, os inscritos receberam um convite para acessar ao curso e iniciar as atividades. Observemos, na figura 21, a *interface* dos módulos do curso.

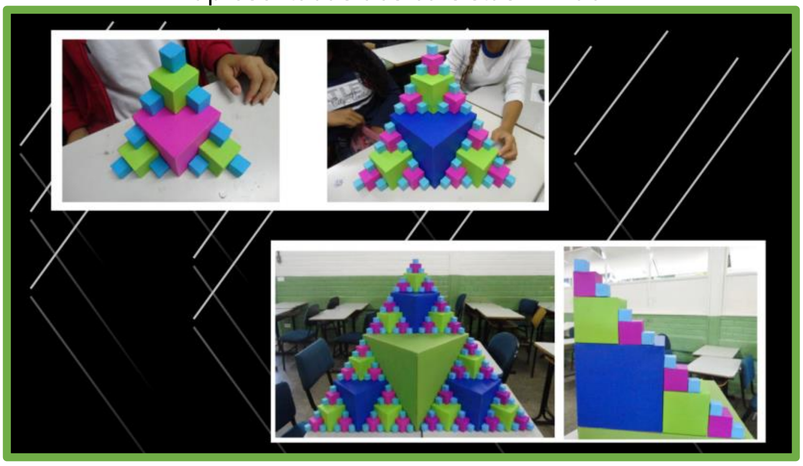
Figura 21 – *Interface* dos módulos do *Google Sala de Aula* utilizado no Enfrac.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No Módulo I, realizado *online*, foram disponibilizados vídeos de apresentação do curso e dos fractais. Além disso, havia vídeos com instruções que auxiliavam os professores a fazerem o *download* do *software GeoGebra Classic* 5.0, versão para *desktop* em seus computadores. Para esse módulo, criamos o vídeo “Construção de cubos por dobraduras” e apresentamos para os cursistas juntamente com materiais de leitura envolvendo práticas de ensino da matemática com os fractais.

O Módulo II ocorreu de forma presencial. Nele, apresentamos o que são os fractais, suas características e algumas aplicações. Solicitamos aos cursistas que construíssem cubos por dobraduras, conforme apresentava o vídeo que criamos para eles no Módulo I, e em aula presencial, construíram um fractal formado pelos cubos construídos. Essa proposta foi baseada em uma das atividades de ensino da Matemática com fractais para alunos da Educação Básica desenvolvida por Souza (2014). Mais detalhes sobre essa atividade de desenvolvida por Souza (2014), com alunos do ensino médio, podem ser observados na figura 22.

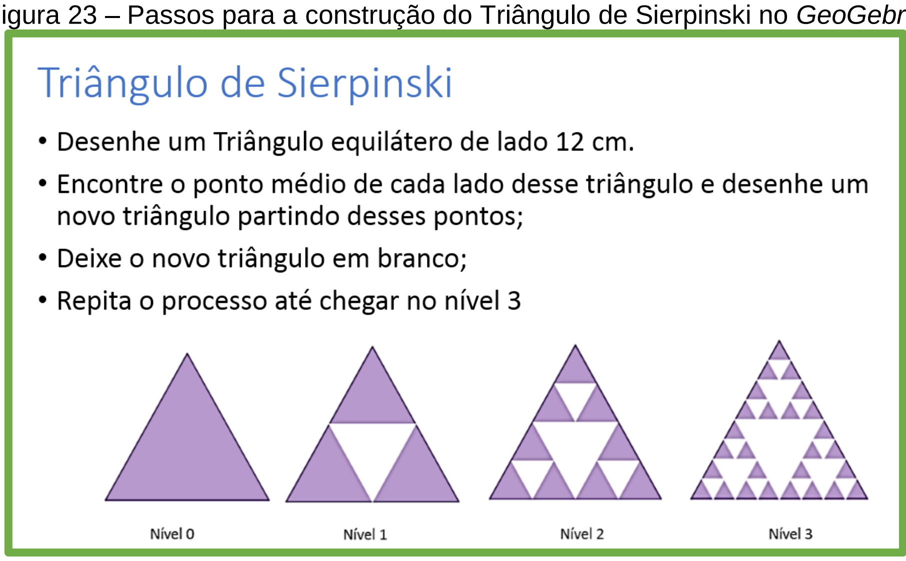
Figura 22 – Pirâmide fractal com cubos desenvolvida por alunos do Ensino Médio e que foram apresentadas aos cursistas Enfrac.



Fonte: Souza (2014).

Ainda no Módulo II, os cursistas construíram o fractal do triângulo de Sierpinski e o jogo do caos, ambos com o *software GeoGebra*. Para a construção do triângulo de Sierpinski foi solicitado que eles realizassem os passos apresentados na figura 23.

Figura 23 – Passos para a construção do Triângulo de Sierpinski no *GeoGebra*.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Já o jogo do caos[4], teve como premissa apresentar uma das curiosidades dos fractais para os cursistas e, ainda, mostrar algumas características dessas estruturas, tais como, por exemplo, a complexidade infinita e a irregularidade. Salientamos que o jogo do caos mobiliza, principalmente, os conteúdos ligados à probabilidade e à estatística, podendo ser explorado em sala de aula como uma proposta de ensino para a abordagem dessas unidades temáticas.

O Módulo III foi realizado à distância. Nele, os cursistas deveriam realizar, em grupo e individualmente, as seguintes atividades:

- ✓ criar um vídeo para uma aula com fractais, com base nos cubos que eles criaram durante os módulos I e II (atividade em grupo);
- ✓ desenvolver um plano de aula em que se utilizasse o vídeo produzido e o fractal por cubos (atividade em grupo);
- ✓ elaborar um plano de aula para trabalhar com qualquer fractal (atividade individual);
- ✓ construir um dos dez fractais clássicos no *software GeoGebra*, comentando os passos no fórum do *Google Sala de Aula* (atividade individual).

A proposta de desenvolver vídeos foi escolhida, pois a visualização de vídeos digitais[5] tem se tornado uma atividade comum no século XXI. Utilizando aplicativos de celular ou redes sociais, crianças, jovens e adultos têm produzido, visualizado e compartilhado vídeos. De acordo com Domingues (2014, p. 23-24), "o vídeo está sendo cada vez mais utilizado para fins de pesquisa e diversão, uma vez que proporciona uma grande quantidade de informação de maneira rápida e dinâmica". Além disso, levando em considerações a necessidade de "fomentar discussões acerca da formação continuada que direcione o professor a planejar sua prática com o uso do vídeo", conforme comenta Silva (2011, p. 140), propusemos essa atividade precisamente para que os cursistas do Enfrac viessem a refletir sobre essa metodologia de ensino.

[4]Passos disponíveis no Apêndice D.
[5]Entendemos como "vídeos digitas" apresentação de imagens e sons simultaneamente "transformados na informação que os computadores podem compreender" (DOMINGUES, 2014, p. 22).

Já as atividades de construção de fractais, além de reforçarem os conhecimentos dos cursistas sobre o *software GeoGebra*, seria outra atividade do curso onde buscaríamos observar a interação dos cursistas com uma proposta de ensino da matemática com os fractais, apresentando-se apenas uma figura dessa estrutura e sem o auxílio ou intervenção do professor.

A proposta de criação de planos de aula pelos cursistas no Enfrac teve como objetivo incentivar a pensar sobre as abordagens de ensino voltadas para o ensino de fractais, com base no que os participantes já tinham vivenciado no curso. Buscaram-se, assim, conteúdos que poderiam ser associados ao ensino da Matemática com os fractais, incentivando os professores a refletirem sobre suas práticas por meio da criação desse documento. De acordo com Schiabel e Felício (2018), o planejamento é

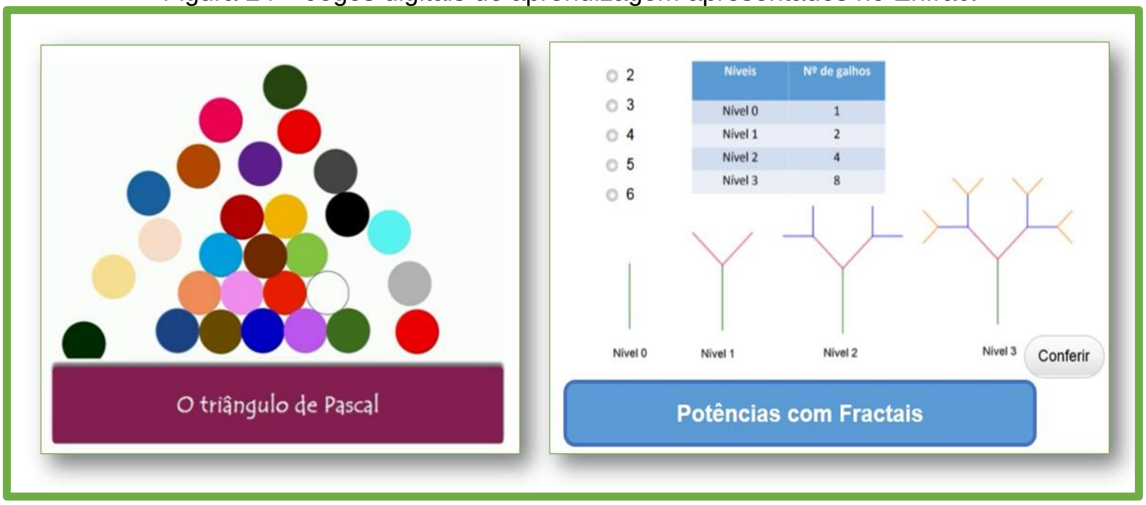
> [...] um componente imprescindível para a prática docente, pois é nesse momento que o professor tem a oportunidade de planejar, de organizar, de reorganizar, de estruturar suas ações de forma a enriquecer o conhecimento dos estudantes, contribuindo para um processo de ensino-aprendizagem mais significativo. (SCHIABEL; FELÍCIO, 2018, p. 845).

Dessa forma, entendemos que planejar as aulas e criar o respectivo do plano é fundamental para que as ações pedagógicas surtissem um efeito positivo no processo de aprendizagem dos alunos. Como aponta Libâneo (2013, p. 197), “o trabalho docente sendo uma atividade intencional e planejada, requer estruturação e organização a fim de que sejam atingidos os objetivos de ensino”. Disponibilizamos um modelo plano de ensino para servir de guia à elaboração dos planos de aula (disponível no Apêndice F). Buscarmos perceber, por meio das propostas elaboradas pelos cursistas, como abordar o ensino da Matemática com os fractais na Educação Básica.

Para as atividades em grupo, os cursistas foram divididos em três grupos segundo as modalidades (ou níveis) de ensino de seu interesse, para que eles pudessem criar em conjunto e pensar em uma das modalidades de ensino, as duas atividades em grupo solicitadas acima. Os grupos foram denominados da seguinte forma: Ensino Fundamental Anos Iniciais (grupo 1 – Efai), Ensino Fundamentais Anos Finais (grupo 2 – Efaf) e Ensino Médio (grupo 3 – EM).

Por fim, o Módulo IV, que ocorreu de forma presencial, destinou-se à apresentação das atividades produzidas pelos cursistas, à aplicação de questionários e à promoção de rodas de conversas. Foram também apresentados aos cursistas dois jogos digitais, seguidos da construção de um caleidoscópio. Os jogos foram o do triângulo de Pascal e o da potência com fractais. O primeiro explorou conteúdos como a adição, a multiplicação e a paridade, a partir da apresentação da estrutura de formação do triângulo de Pascal, e ainda a relação deste com o fractal do triângulo de Sierpinski. O segundo consistia em um *quiz* que abordou o conceito de potência, com base nas estruturas de alguns fractais[6]. Na figura 24, observemos a *interface* dos dois jogos.

Figura 24 – Jogos digitais de aprendizagem apresentados no Enfrac.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

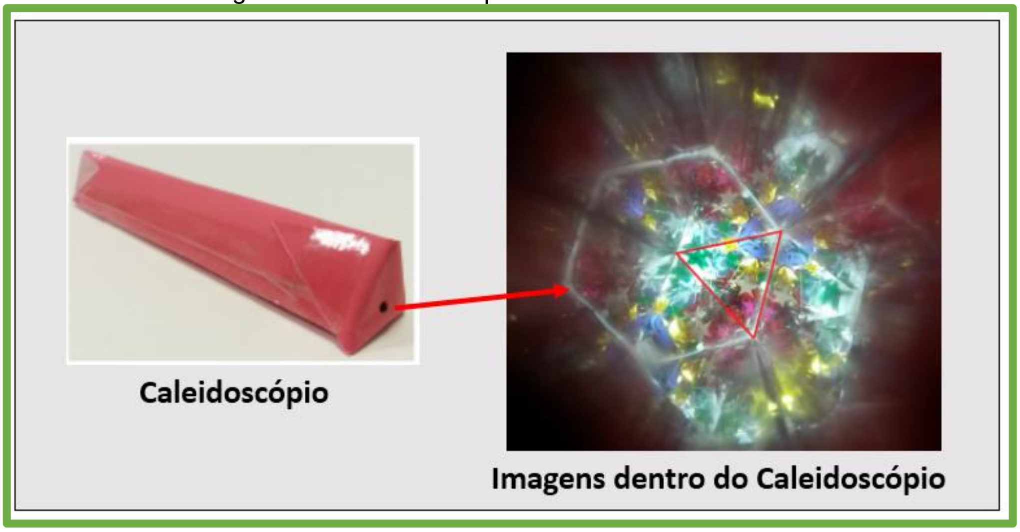
Em seguida, os cursistas foram apresentados ao primeiro questionário semiestruturado (Apêndice C). Esse questionário, respondido em grupo, indagava as percepções dos cursistas sobre os objetos do conhecimento matemáticos (ou conteúdos da Matemática) identificados por eles ao pensarem em práticas de ensino envolvendo os fractais, na etapa de ensino da Educação Básica. Em seguida, os professores apresentaram à turma os vídeos produzidos em grupo, comentaram sobre os planos de aula, tanto os realizados em grupo

[6]Esses objetos digitais de aprendizagem foram desenvolvidos utilizando o programa *ActivePresenter*, que pode ser acessado no *site* “É Hora da Matemática” (https://sites.google.com/view/horadamatemtica/p%C3%A1gina-inicial). Acesso em: 20 out. 2020.

quanto os desenvolvidos de forma individual, e apresentaram suas construções de um dos dez fractais contidos no Apêndice IV. Eles ouviram e discutiram melhorias, adaptações e dificuldades encontradas durante a realização dessas atividades.

Ao final do curso, os cursistas responderam a um questionário individual sobre os conteúdos que podem ser aplicados na Educação Básica. Organizamos também uma roda de conversa para discutirmos quais foram as suas percepções quanto às atividades propostas no curso. O curso foi finalizado com a construção do caleidoscópio, um material didático com o formato de prisma triangular utilizado para visualizar fractais em seu interior (CAMPOS, 2019). Observemos, na figura 25, uma representação da visão interna e externa de instrumento.

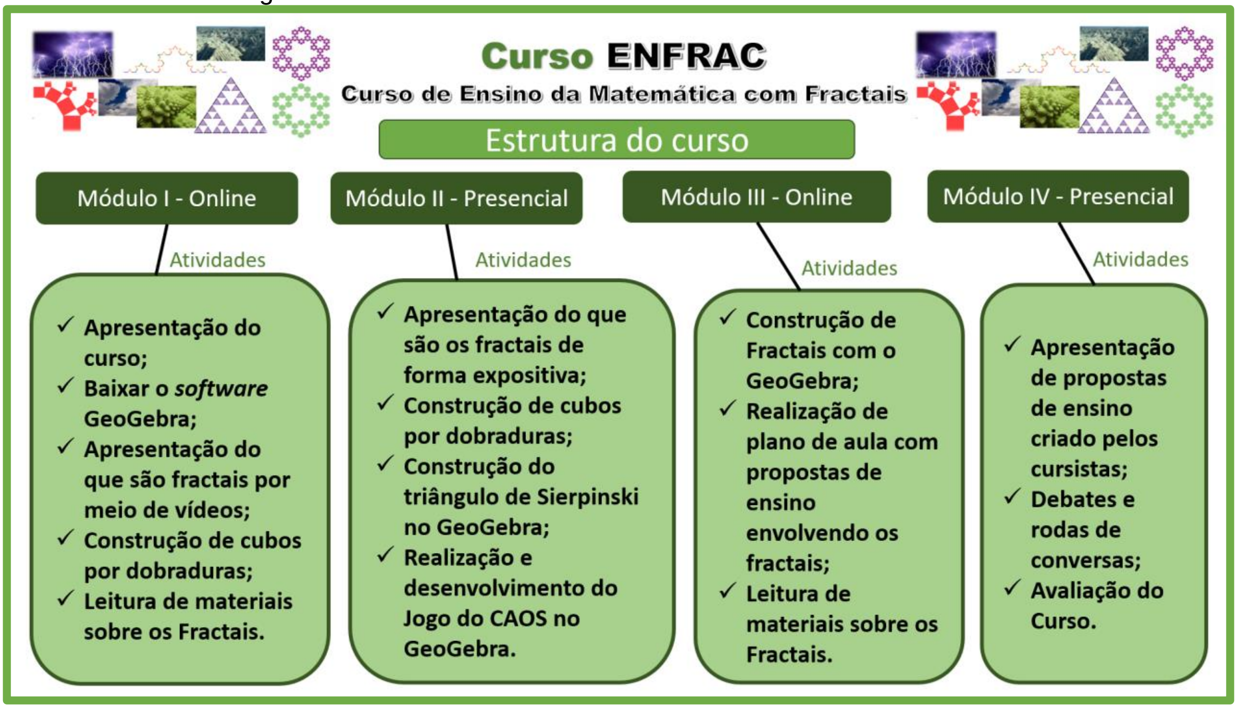
Figura 25 – Caleidoscópio: visão externa e interna.



Fonte: Omelczuck, Soga e Muramatsu (2017, p. 6).

A proposta da criação desse instrumento, além de reforçar caraterísticas dos fractais (complexidade infinita, autossimilaridade, irregularidade e dimensão fracionária), pretendeu presentear os participantes com uma lembrança do curso. Na figura 26, buscamos ilustrar a estrutura do curso Enfrac com os módulos e atividades desenvolvidas.

Figura 26 – Estrutura do curso Enfrac e suas atividades.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, analisamos e discutimos os dados produzidos ao longo do desenvolvimento desta pesquisa. Em primeiro lugar, traçamos o perfil dos sujeitos da pesquisa, incluindo os seus conhecimentos prévios sobre o ensino da Matemática com os fractais e apresentamos os resultados da identificação de seus saberes sobre o uso do *software GeoGebra*, tecnologia que seria adotada no Enfrac. Logo após, apresentaremos como ocorreram as atividades e as interações realizadas e observadas durante o curso. Discutimos, por último, as percepções que emergiram a respeito de como abordar o ensino da Matemática com fractais na Educação Básica.

5.1 Os cursistas Enfrac e seus saberes sobre os fractais e o GeoGebra

Esta pesquisa foi realizada com a participação de nove professores, oriundos das cidades de Barra do Bugres, Denise e Tangará da Serra, situadas no estado do Mato Grosso. Destes, sete atuavam na Educação Básica da rede pública desse estado, e dois não atuavam na Educação. Dos sete professores atuantes na Educação Básica, três possuíam menos de dois anos docência e quatro haviam completado mais de quatro anos de sala de aula. Com exceção de um matemático, os demais cursistas eram do sexo feminino.

Ao serem questionados sobre seus conhecimentos em relação aos fractais, seis participantes alegaram conhecer essas estruturas. Apesar de alguns terem dito que as conheciam, oito disseram que nunca haviam estudado tal tópico durante a Graduação – ou, pelo menos, não se lembravam de ter estudado. Vejamos alguns relatos[7] sobre isso. Lembramos que, doravante, a nomenclatura que identifica os participantes faz alusão à formação acadêmica em Matemática (M) ou Pedagogia (P).

> **M7:** *Meu conhecimento sobre os fractais é estreito, não estudei [isso] na Graduação [...].*
> **M5:** *[...] Não sabia dos nomes e dos tipos de fractais e como cada um poderia ter aplicação na sala de aula, relacionando com conceitos matemáticos [...].*

---

[7]As respostas foram transcritas de forma fiel e, portanto, não foram submetidas a correções gramaticais.

> **P2:** *[...] Não havia estudado os fractais até o momento [...].*
> **M6:** *[...] Não me recordo de ter estudado [isso] na Graduação.*

Apenas um dos participantes relatou ter estudado fractais na Graduação, declarando: “Na Graduação, estudei apenas o triângulo de Sierpinski, mas não sabia que esse triângulo era um fractal” (M1). Dessa forma, conclui-se que a maior parte desses professores desconhecia os fractais até a participação no Enfrac.

Na apresentação realizada durante a primeira aula presencial, uma das pedagogas comentou que decidiu fazer o curso exatamente porque sentia a necessidade de conhecer mais sobre a Matemática e sobre as figuras incluídas no *folder* de apresentação do curso, figuras essas que ela nunca tinha visto antes. Essa participante asseverou que estava no curso “não por causa da certificação, mas para aprender” (cursista não identificada).

Quando os professores foram questionados sobre quais conteúdos abordaram em suas práticas envolvendo os fractais (questão 6 e 7 do Apêndice A), apenas dois deles alegaram ter abordado esse tópico em sala de aula. Um participante respondeu apenas “Geometria”, e um outro comentou: “Só apliquei o triângulo de Sierpinski em uma atividade avaliativa” (cursistas não identificados). Com base nisso, entendemos que o conhecimento dos cursistas Enfrac sobre o tema em questão era superficial. A mesma coisa já havia sido constatada no minicurso que tínhamos promovido durante o I Emapem, conforme já adiantado na introdução deste trabalho.

Como uma parte das atividades do Enfrac já tinham sido planejadas com o uso do *software GeoGebra*, nesse primeiro encontro presencial, foi perguntado aos cursistas se eles já utilizavam essa tecnologia em sala de aula (questões 8 e 9 do Apêndice B). Oito deles responderam que sim, que conheciam essa tecnologia. Especificamente em relação à questão objetiva de número 8 (se usavam ou não fractais em sala de aula), os participantes responderam[8]:

> **Professor 1:** *Não.*
> **Professor 2:** *Em uma oficina na escola anterior. Por meio do Tangra, [para] construir várias figuras.*

---

[8]Salientamos que, devido a essas questões terem sido aplicadas pelo questionário *online,* não conseguimos identificar esses sujeitos. O mesmo aconteceu com o questionário individual aplicado em sala, durante aulas presenciais. Dessa forma, apenas nesse conjunto de citações, os cursistas foram identificados como “Professor *x”*, sendo “*x”* o número de identificação desses sujeitos.

> **Professor 3:** *Levei no laboratório para comparar a Lei de Existência dos Triângulos.*
> **Professor 4:** *Ainda não, pretendo trabalhar com o* software *neste bimestre.*
> **Professor 5:** *Ainda não, porque conheci o* GeoGebra *apenas agora, mais ainda não sei como utilizar.*
> **Professor 6:** *Sim, para trabalhar retas, paralelas, perpendiculares, quadriláteros.*
> **Professor 7:** *Sim, com o ensino de funções e polígonos convexos.*
> **Professor 8:** *Utilizei no meu estágio.*
> **Professor 9:** *Utilizei apenas com funções do 1.º e do 2.º grau e algumas planificações de poliedros regulares, corpos redondos, prismas e pirâmides.*

Assim, conclui-se que pelo menos sete dos cursistas já teriam contato com o *software GeoGebra* e que os outros três teríamos que dar uma atenção maior nas atividades realizadas com essa tecnologia.

5.2 Resultados das práticas desenvolvidas no Enfrac

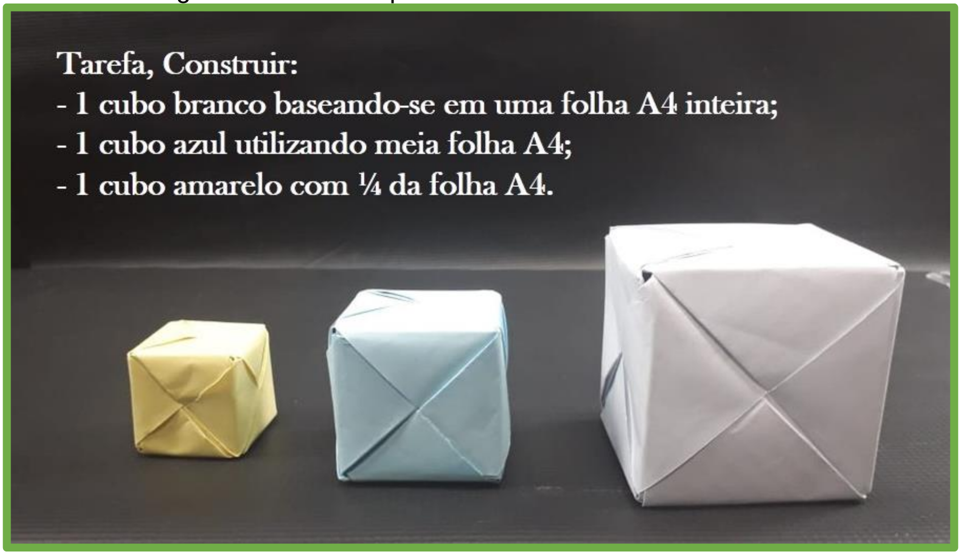
Nos quatro módulos apresentados aos cursistas, conseguimos obter resultados importantes para a nossa pesquisa. Em seguida, nesta subseção, destacaremos os principais acontecimentos de cada um desses módulos.

5.2.1 Módulo I

O módulo I ocorreu de forma *online*, os cursistas foram apresentados ao curso através de um vídeo explicativo sobre a sua estrutura, os módulos e atividades que neles seriam apresentadas e desenvolvidas. Na plataforma do *Google Sala de Aula*, foram-lhes sugeridas a visualização de vídeos sobre o que são os fractais e leituras envolvendo práticas de ensino da Matemática com os fractais. Além disso, como atividade prática, solicitados que construíssem três cubos por dobraduras, seguindo as orientações apresentadas no vídeo "Construção de cubos por dobraduras"[9] e que os levassem para o módulo II. A figura 27, ilustra essa atividade.

[9]Esse vídeo pode ser acessado no *site* "É Hora da Matemática" (https://sites.google.com/view/horadamatemtica/p%C3%A1gina-inicial). Acesso em: 03 fev. 2020.

Figura 27 – Cubos que os cursistas deveriam construir.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A proposta de realizar essa atividade teve por objetivo abordar alguns conceitos referentes à geometria Euclidiana, tais como as formas quadrado, triângulo, paralelogramo e trapézio, e apresentar o passo a passo da construção de um cubo. Mas sobretudo, pretendia-se com esses cubos, que os participantes construíssem uma pirâmide fractal e, com isso, conhecessem um pouco mais sobre os fractais no espaço, em três dimensões.

5.2.2 Módulo II

Como os cursistas não foram informados sobre o que eles fariam com os cubos no Módulo II, apesar de terem construídos os cubos em suas casas, alguns dos matemáticos estavam intrigados com a atividade. Eles tinham noção do que era um fractal, mas não conseguiam fazer relação entre a geometria Euclidiana e a Fractal, presente no processo de construção do cubo. Contudo, quando a imagem da pirâmide fractal (figura 15) foi projetada para esses participantes, eles conseguiriam estabelecer relações e se mostraram empolgados com a atividade. Imediatamente, começaram a tentar construir a pirâmide fractal sugerida. A realização dessa atividade é apresentada na figura 28.

Figura 28 – Cursistas projetando e construindo a pirâmide fractal.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para a construção da pirâmide, além dos cubos que eles construíram no módulo I, foram disponibilizados aos cursistas mais cinco cubos de tamanhos diferentes: dois cubos azuis, dois rosas e um vermelho. Estes foram construídos com base no tamanho da folha do papel color 7. Ao tentar montar a pirâmide de Souza (2014) (ver figura 15), os participantes perceberam que seria necessário um número maior de cubos. Em seguida, eles desenharam um esquema e perceberam também que os cubos deveriam ter tamanhos específicos, que fossem proporcionais e que seguissem um padrão. Aos poucos, foram projetando a pirâmide com o auxílio de um papel.

No final dessa etapa, com base nos cubos que possuíam, os participantes resolveram criar uma pirâmide de fractal com cubos distinta da pirâmide fractal apresentada por Souza (2014). Essa pirâmide foi batizada de “Pirâmide Enfrac” e pode ser visualizada na figura 29.

Figura 29 – Pirâmide Enfrac.

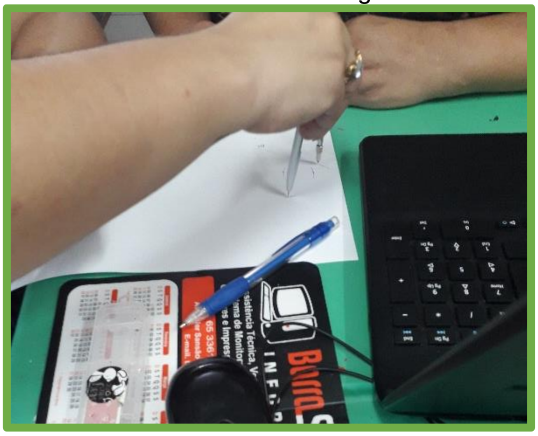
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Após a construção desse primeiro fractal, os cursistas foram indagados sobre algumas possibilidades de ensino da Matemática da Educação Básica. O intuito era fomentar ideias e auxiliá-los nas atividades que deveriam ser realizadas durante os módulos III e IV. Nos relatos iniciais, pudemos perceber que os cursistas já identificavam estudos voltados para as unidades temáticas de grandezas e medidas, álgebra e números, e também para o estudo de objetos do conhecimento matemático como perímetros, áreas, volumes, sequências, contagens, entre outros.

A outra atividade desenvolvida ainda nesse módulo II foi a construção do triângulo de Sierpinski no *software GeoGebra*. Para isso, os participantes foram orientados a seguir os passos da figura 22. O primeiro passo consistia em desenhar um triângulo equilátero de lado 12 cm. Os cursistas que já conheciam o *software GeoGebra* logo utilizaram a ferramenta “polígono regular” – ela permite que se crie um polígono regular com base em um segmento inicial e na quantidade de lados indicados pelo usuário. Assim, os que já tinham familiaridade com o *GeoGebra* rapidamente obtiveram o triângulo equilátero de lado 12 cm.

Ainda nesse primeiro passo, foi solicitado aos cursistas que realizassem a mesma construção do triângulo de 12 cm de lado, mas que, dessa segunda vez, não se utilizasse a ferramenta “polígono regular”. Dessa forma, eles foram instigados a pensar em outras estratégias que mobilizassem diferentes conceitos matemáticos, possíveis de serem abordados no ensino da Educação Básica, mas que ainda não tinham sido percebidos por eles durante a primeira construção do referido triângulo. Alguns professores de Matemática, utilizando, em primeiro lugar, o papel e o compasso, recorreram aos seus conhecimentos geométricos, adquiridos durante o processo de Graduação, para a construção de triângulos equiláteros com papel e compasso. É o que mostra a figura 30.

Figura 30 – Cursistas construindo triângulos com o compasso.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com essa intervenção pedagógica e a nova construção realizada pelos cursistas, eles revisaram os conceitos de circunferência, perímetro, triângulo equilátero, ponto médio, bissetriz, entre outros referentes à geometria Euclidiana. Contudo, alguns conceitos da álgebra, importantes para serem trabalhados quando o assunto é fractais, ainda tinham sido pouco explorados. Então, em seguida, outra intervenção foi realizada: “agora, sem utilizar as ferramentas anteriores, busquem executar a mesma construção do triângulo equilátero de 12 cm no *software*”, propôs um dos professores do Enfrac.

Alguns cursistas logo recorreram às ferramentas “segmento de reta” e “polígono”, e muitos tentaram igualar os lados do triângulo utilizando as suas habilidades motoras. No entanto, essas tentativas geravam apenas triângulos com lados de comprimentos aproximados – não se tratando, portanto, de triângulos equiláteros propriamente ditos. Dessa forma, os participantes novamente foram instigados a pensar em uma solução matemática para resolver o problema. Após algumas discussões, chegaram ao teorema de Pitágoras. A seguir, descrevemos passo a passo a estratégia concebida por eles:

✓ criar um triângulo retângulo de base 6 cm, de hipotenusa 12 cm e altura x, baseando-se nas coordenadas dos eixos na janela de visualização do *software*;

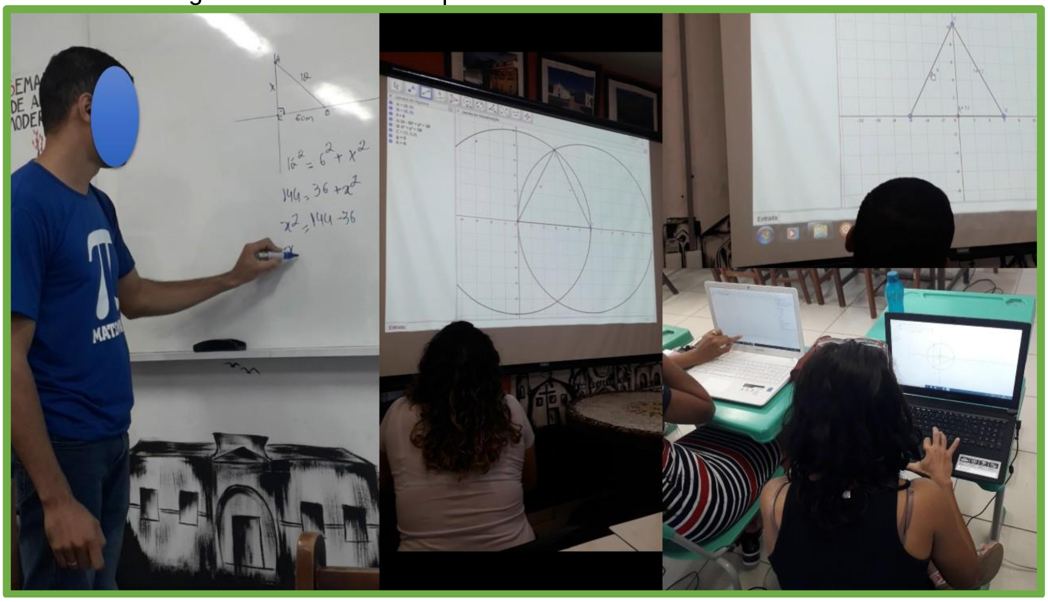
✓ utilizando o teorema de Pitágoras, encontrar o valor da altura, que é dada pela extração da $\sqrt{108}$ cm, o que equivale a aproximadamente 10,4 cm;

✓ marcar a altura utilizando a caixa de entrada;

✓ refletir sobre esse triângulo criado.

Salientamos que as investigações, as descobertas e as soluções desta atividade foram realizadas por meio de discussões coletivas realizadas pelos cursistas. Eles buscaram tais soluções em seus computadores e compartilharam-nas com seus colegas. Em seguida, apresentaram as descobertas no quadro da sala de aula, no *GeoGebra*, projetado pelo *datashow*, ou no próprio computador. Observe a figura 31.

Figura 31 – Cursistas apresentando atividades no Módulo II.

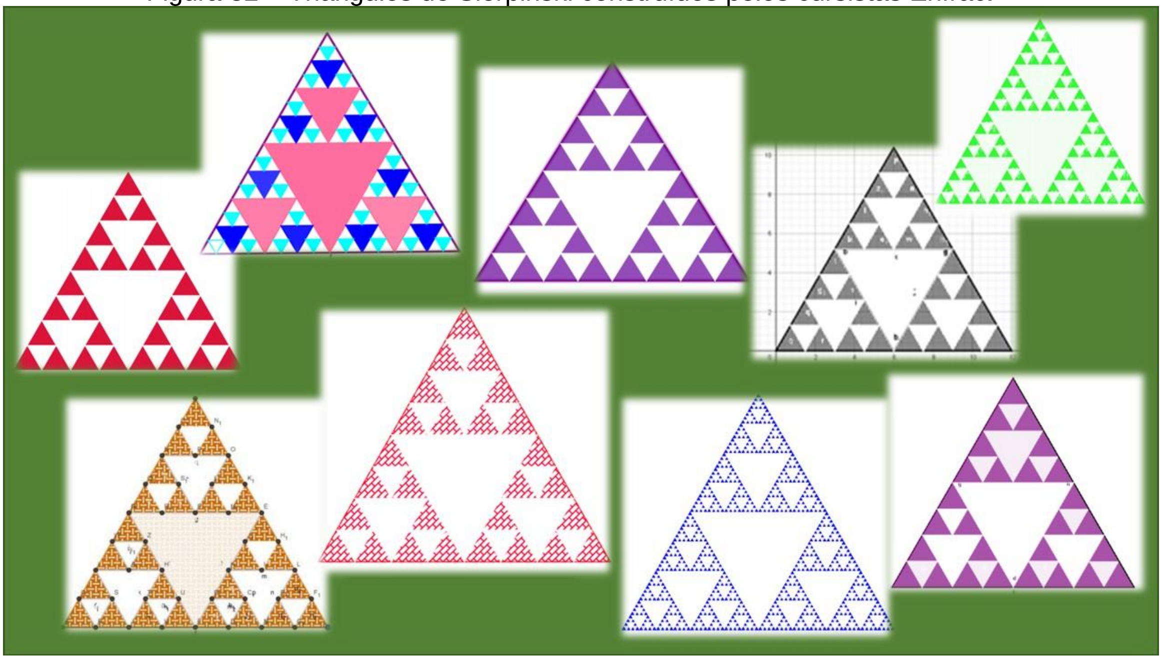


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Finalizado o processo de construção do triângulo equilátero de 12 cm, o 1.º) passo para a construção do triangulo de Sierpinski, caminhamos para a realização dos demais passos: 2.º) encontrar o ponto médio de cada lado do triângulo e desenhar um novo, partindo desses pontos médios; e 3.º) deixar o novo triângulo em branco. Não foram realizadas quaisquer intervenções nestas etapas. Os cursistas realizaram esses dois passos e coloriram seus fractais de acordo com suas preferências. No 4.º) passo, eles repetiram os passos 2.º) e

3.º) até chegarem ao nível 3 do fractal projetado e, assim, finalizaram a construção do triângulo de Sierpinski. Por mais que tenham passado pelos níveis de 0 a 3 em suas construções, os cursistas concluíram apenas o nível 3. Cada um utilizou cores das suas preferências para decorar os triângulos. Alguns inclusive utilizaram recursos de efeito para diferenciar suas construções. A figura 32 mostra alguns resultados.

Figura 32 – Triângulos de Sierpinski construídos pelos cursistas Enfrac.

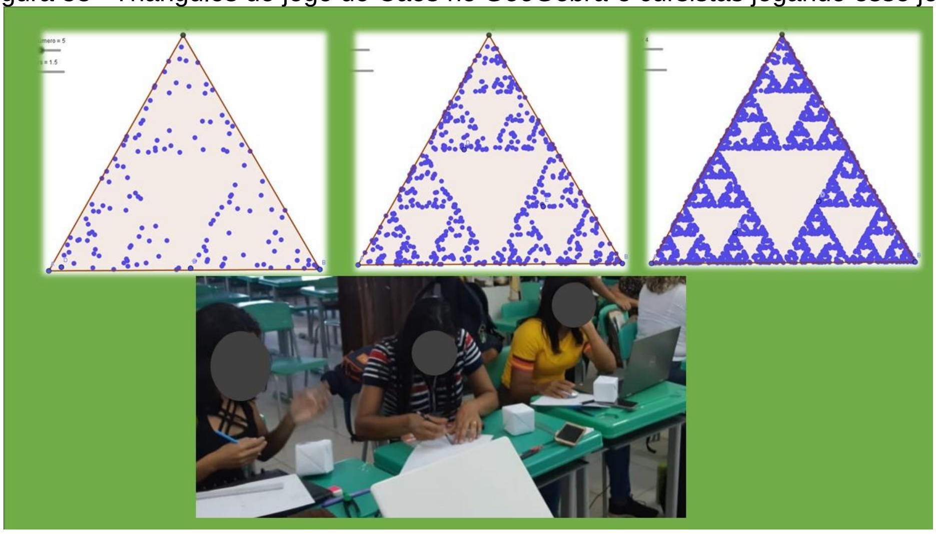


Fonte: Cursistas do Enfrac (2019).

Após a construção desse fractal foi solicitado aos participantes que observassem os níveis pelos quais eles haviam passado, níveis 0, 1, 2 chegando no 3 (ver figura 16.) Por meio dessa observação, eles deveriam perceber outros objetos do conhecimento matemático que se diferenciassem das unidades temáticas de geometria e de grandezas e medidas. Por meio de um processo investigativo realizado na construção desse fractal, entendemos que essa atividade teve grande relevância para que os cursistas identificassem vários objetos desse conhecimento matemático presente. Foram listados tópicos como geometria, grandezas e medidas, números e álgebra, mencionados na figura 47.

Para finalizar esse encontro presencial, realizamos a atividade do jogo do caos no *GeoGebra*. Conforme descrito na seção 2.2, trata-se de uma atividade adaptada de Barbosa (2005), Nunes (2006), Rabay (2013) e Adami (2013), na qual os jogadores jogam um dado enumerado de 1 a 6 e marcam pontos no interior do triângulo, gerando, de forma aleatória, por meio dos pontos, um triângulo de Sierpinski (figura 33).

Figura 33 –Triângulos do jogo do Caos no *GeoGebra* e cursistas jogando esse jogo.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O jogo em questão foi inicialmente mostrado de forma expositiva na lousa, de forma a ilustrar para os cursistas como se dava a marcação dos pontos e a escolha dos vértices. Depois, foi solicitado a eles que, inicialmente, realizassem algumas marcações de pontos em um triângulo desenhado no papel e que utilizassem o dado construído por dobraduras para fazer a escolha do ponto aleatoriamente. Após a marcação de cerca de 20 pontos, ainda não se percebia o triângulo de Sierpinski e muitos já estavam entediados, não entendendo o objetivo da atividade. Então, mostramos a animação realizada no *GeoGebra*[10] e o espanto foi inevitável. Imediatamente, os participantes quiseram realizar a animação em seus computadores e expressaram o desejo de propor o jogo aos seus alunos.

5.2.3 Módulo III

No Módulo III, realizado *online*, os cursistas deveriam completar duas atividades: criar um vídeo para uma aula com fractais com base nos cubos já

---

[10]Esse triângulo foi gerado por meio das instruções contidas no material disponível no Apêndice D, que pode ser acessado no *site* “É Hora da Matemática” (https://sites.google.com/view/horadamatemtica/p%C3%A1gina-inicial). Acesso em: 03 fev. 2020.

construídos (atividade em grupo); e desenvolver um plano de aula em que se utilizasse esse vídeo produzido e/ou uma atividade envolvendo uma pirâmide por cubos – esta poderia ser a Enfrac ou qualquer outra pirâmide fractal (atividade em grupo). Para as atividades coletivas desse módulo, os cursistas foram divididos em grupos, conforme as diferentes modalidades da Educação Básica: Ensino Fundamental Anos Iniciais (Efai), Ensino Fundamental Anos Finais (Efaf) e Ensino Médio (EM). Eles formam identificados do seguinte modo: grupo 1 – Efai; grupo 2 – Efaf; e grupo 3 – EM.

O grupo 1 buscou produzir um vídeo no qual contaram uma história infantil envolvendo uma pirâmide construídas por cubos. O grupo 3 produziu seu vídeo explicando como realizar a construção da Pirâmide Enfrac no *software GeoGebra*. O grupo 2 não realizou essa atividade.

O grupo 1 buscou abordar a unidade temática de grandezas e medidas, explorando contagem (soma), formas, cores e sequências, como consta no plano de aula apresentados por eles (figura 34).

Figura 34 – Parte do plano de aula do grupo Efai.

Conteúdo Central
Grandezas e Medidas.
Outros Conteúdos
☐ Soma; ☐ Formas; ☐ Cores; ☐ Sequência.
Objetivo Geral
Fazer com que os alunos usem o conceito de sequência, cores, formas e soma, para entender a História do Reino Feliz, montando então um Fractal.
Objetivos Específicos
☐ Fazer com que a criança aprenda brincando; ☐ Usar as cores e as formas geométricas no ensino de fractal; ☐ Analisar os conceitos de contagem e soma.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na figura 35, apresentamos também a história infantil desenvolvida por esse grupo, chamada de “O Reino Feliz”, conforme consta na metodologia do plano de aula elaborado pelos integrantes.

Figura 35 – História “O Reino Feliz” criada pelo grupo Efai.

“O Reino Feliz”

Era uma vez um rei que ajudava a todos a sua volta e tratava todos com muito carinho. Até que um dia, uma bruxa malvada veio e acabou com todo o seu castelo. O rei ficou muito triste, mas as pessoas que o amava prometeu ajuda-lo e começou a construção.

Primeiro para que o reino e toda a população estivessem protegidos foi colocado 3 quartos para os soldados, que eram grandes e fortes, o maior de todos os quartos. Escadas do ladinho dos quartos que ficaram nas pontas foram colocadas para que as pessoas conseguissem subir.

Para cuidar da comida e da limpeza depois de uma bela noite de sono, foi colocado 3 quartos iguais para cada empregada do reino, para que elas pudessem descansar, os quartos médios.

Para que os príncipes e as princesas pudessem cuidar da cidade com todo o carinho, foi colocado 3 quartos para eles, os quartos pequenos.

E o que sobrou?

E por último em cima da Torre ficava o Rei e a Rainha, no meio do mais alto lugar para que eles pudessem olhar a todos a sua volta sem faltar nada a ninguém.

E foi assim que com muito amor, o Reino voltou a ser feliz.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O grupo Efaf foi o único grupo que não realizou a atividade. De acordo com eles, o tempo disponível para a realização de todas as atividades propostas no curso impossibilitou a realização desta.

De modo geral, os planos de aula desenvolvidos pelos cursistas Enfrac não abrangeram o estudo dos fractais. As aulas voltaram-se para o uso das tecnologias digitais no ensino e para o ensino da geometria e de outras unidades temáticas distintas dessa área da Matemática. Assim, pode-se afirmar que o ensino da geometria Fractal não foi bem explorado pelos cursistas. Isso talvez tenha acontecido devido ao curto período de tempo disponibilizado para essa tarefa e para as demais atividades desse módulo. Essa constatação ficou ainda mais evidente nos planos de aula individuais apresentados pelos cursistas. Vejamos a figura 36.

Figura 36 – Parte de um plano de aula individual.

Recurso(s) Físico(s)	Recursos Materiais
• Sala de aula. • Laboratório de Informática.	• Computador; • Projetor multimídia; • Compasso; • Régua; • Cartolina; • Lápis; • Canetinha colorida; • Borracha.
Conteúdo Central	
Teorema de Pitágoras	
Outros Conteúdos	
Relações Métricas no Triângulo Retângulo	
Objetivo Geral	
Compreender a relação entre as medidas dos catetos e da hipotenusa em um triângulo retângulo como também o cálculo de suas áreas.	

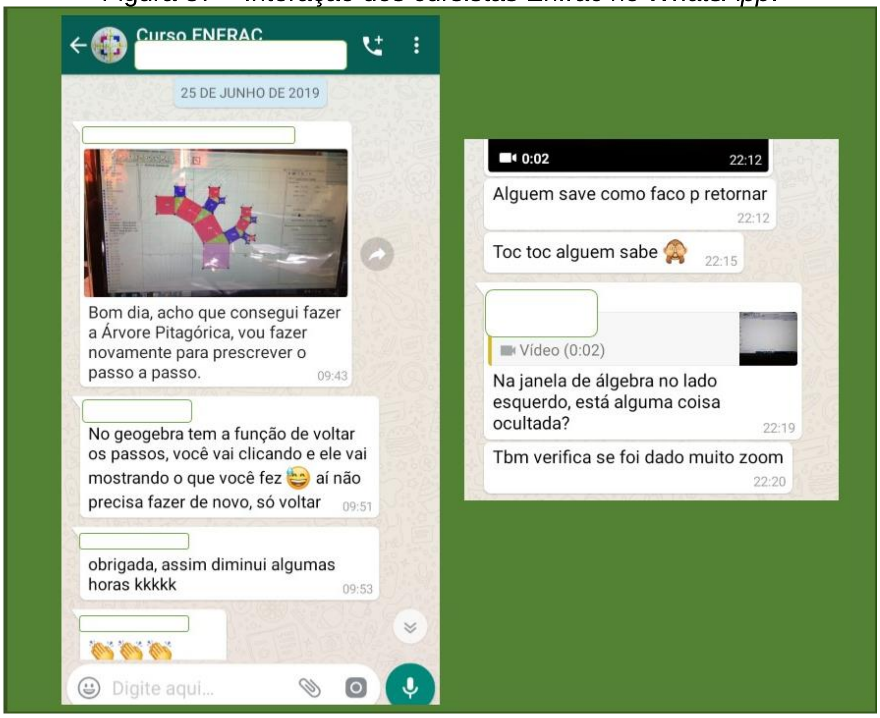
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

De todo modo, vários cursistas buscaram desenvolver seus planos de aula utilizando o recurso do Laboratório de Informática e o *GeoGebra*, além de outros recursos tecnológicos, tais como *datashow*, vídeos e computador. Entendemos que esses usos já são importantes para o processo de ensino, atendendo a que, muitas vezes, o quadro e giz são os únicos recursos utilizados pelos professores (CAMPOS; FAGUNDES, 2018b). Romper essa zona de conforto, mesmo que apenas nos planos de ensino, já simboliza uma reflexão sobre a própria prática docente desenvolvida no contexto de ensino atual.

Em relação à segunda atividade desse Módulo III, utilizando o *GeoGebra*, os cursistas deveriam construir um dos dez fractais clássicos. Após a realização dessa atividade, eles deveriam comentar os passos utilizados em suas construções no fórum do *Google Sala de Aula*. Os intuitos dessa atividade foram: promover a investigação matemática; ampliar a visão dos cursistas quanto aos objetos do conhecimento matemático possíveis de serem abordados na Educação Básica; e investigar como realizar propostas de ensino para essa etapa formativa, com base nas construções de fractais com o *GeoGebra*. Além disso, essa atividade de construir um dos dez fractais buscou fazer com que os cursistas explorassem um pouco mais o *software GeoGebra*, mobilizando os conhecimentos adquiridos na aula presencial do Módulo I e, dessa forma, fomentando nos cursistas do Enfrac o desejo de fazer uso desse recurso digital em suas práticas de ensino.

Para essa atividade, a interação entre os participantes foi um elemento de destaque. Os cursistas puderam aprofundar seus conhecimentos sobre o *GeoGebra*, compartilhar imagens das suas construções, tirar suas dúvidas sobre o *software* e conhecer novas ferramentas e possibilidades de dinamismos dessa tecnologia digital. Embora o *Google Sala de Aula* tenha sido a tecnologia proposta para interagirmos e mediarmos as dúvidas dos cursistas sobre suas construções de fractais no *GeoGebra*, criaram um grupo no aplicativo de mensagens instantâneas *WhatsApp* e essa foi a tecnologia que os cursistas, de fato, utilizaram para esse propósito.

Figura 37 – Interação dos cursistas Enfrac no *WhatsApp*.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

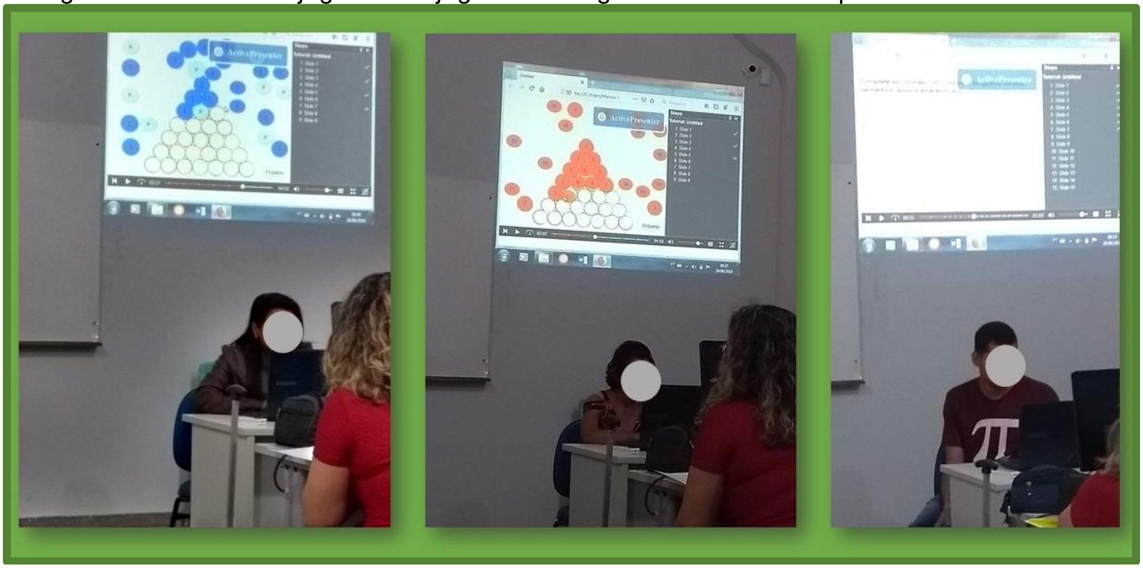
Como mostra a figura 37, as interações a respeito do andamento das atividades foram mais frequentes via *WhatsApp* do que na plataforma do *Google Sala de aula*, embora todos tenham disponibilizado suas construções no fórum deste segundo recurso tecnológico. As interações mostradas na referida figura revelam o quanto esse recurso digital está fazendo parte das relações interpessoais da atualidade, o que nos instiga a refletir sobre as possíveis necessidades de se mediar os processos formativos à distâncias com diferentes plataformas e recursos digitais.

5.2.4 Módulo IV

O Módulo IV destinou-se à apresentação dos jogos digitais para os cursistas, às apresentações de suas atividades realizadas no Módulo III e à construção do caleidoscópio, aplicação dos questionários II e III, e foi onde realizamos a roda de conversa para a retomada de forma aberta, sobre algumas questões presentes nesses mesmos questionários.

Iniciamos esse módulo com a apresentação dos jogos digitais de aprendizagem envolvendo os fractais: triângulo de Pascal e potências com fractais. Os cursistas foram convidados a participarem desses jogos, mostrando no *Data show,* os passos seguidos para a execução de suas jogadas. Vejamos a figura 38.

Figura 38 – Cursistas jogando os jogos do triângulo de Pascal e de potências com fractais.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Após a apresentação desses jogos, os cursistas responderam ao questionário II e, em seguida, iniciaram a apresentação de seus trabalhos desenvolvidos no Módulo III. Conforme já explicado, eles deveriam preparar um vídeo para uma aula com fractais baseados nos cubos (atividade em grupo), desenvolver um plano de aula em que se utilizasse esse vídeo produzido (atividade em grupo), elaborar um plano de aula para trabalhar com os fractais (atividade individual) e construir um dos dez fractais clássicos no *software GeoGebra*, comentando os passos no fórum do *Google Sala de Aula* (atividade individual). As respostas apresentadas pelos cursistas referentes aos questionários II e III serão apresentadas e analisadas na seção 5.2 deste trabalho, uma vez que trazem importantes percepções de ensino para o estudo da Matemática com os fractais na Educação Básica.

De acordo com os cursistas, a produção dos vídeos tomou grande parte do tempo deles – muitos nunca haviam produzido tais materiais. O grupo Efai utilizou o celular para as gravações, e o grupo EM preferiu o programa *Vegas Pro*[11]. Apresentamos registros de uma das apresentações desses grupos na figura 39.

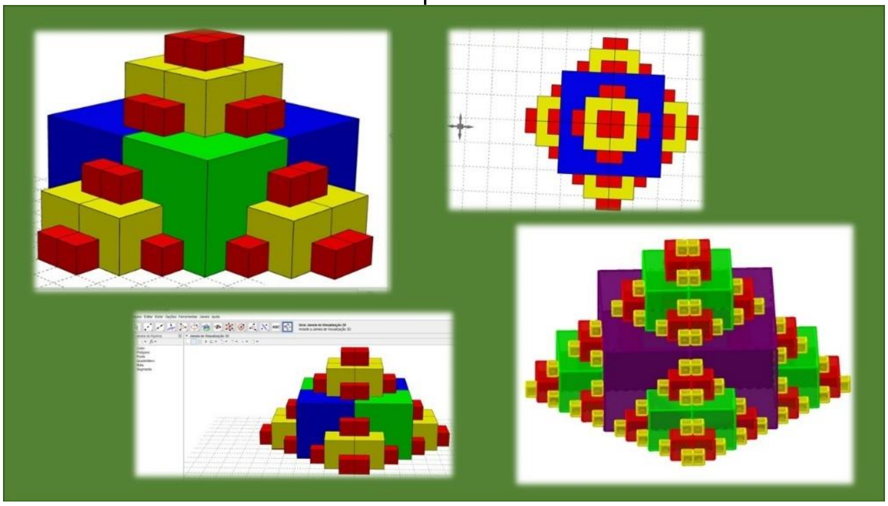
Figura 39 – Cursistas apresentando os seus vídeos.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Embora os cursistas pudessem optar pela produção de vídeos de qualquer prática de ensino ou pela apresentação de aplicações envolvendo os fractais, para nossa surpresa, os integrantes do grupo EM apresentaram um vídeo mostrando a construção da Pirâmide Enfrac no *GeoGebra*, utilizando as ferramentas 3D desse *software*. Isso não estava nos nossos planos – ou seja, não havíamos planejado aulas voltadas para a utilização dessa ferramenta do *software*. De todo modo, além dos integrantes desse grupo, outros cursistas resolveram desenvolver a Pirâmide Enfrac utilizando a *interface* 3D do *software*. Vejamos, na figura 40, algumas das imagens produzidas pelos cursistas.

[11] O Vegas Pro é um software que faz edição de vídeos. Oferece uma versão paga e uma gratuita, como teste (https://www.vegascreativesoftware.com/br/vegas-pro/) Acesso em: 03 fev. 2020.

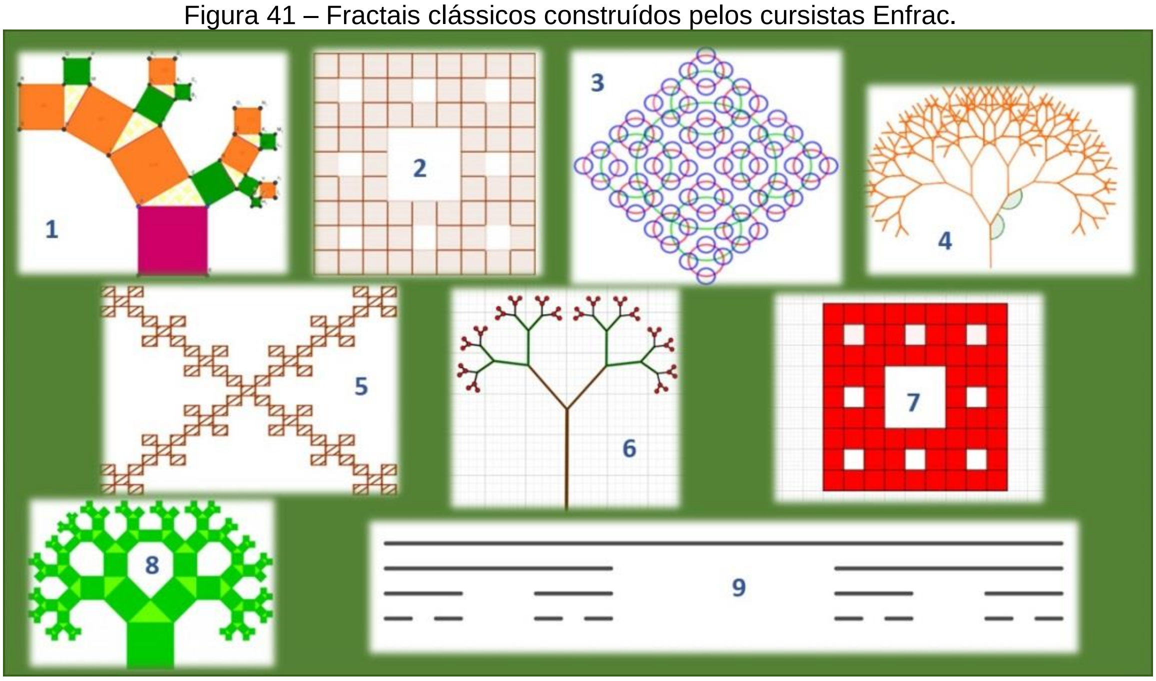
Figura 40 – Pirâmides Enfrac construídas pelos cursistas na *interface* 3D do *GeoGebra*.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Após a apresentação dos vídeos que eles produziram, os cursistas iniciaram as apresentações de suas atividades de construções, no GeoGebra, de um dos dez fractais clássicos que estão disponíveis no Apêndice E. Os fractais escolhidos estão reproduzidos na figura 41 e são identificados do seguinte modo: 1) árvore pitagórica; 2) tapete de Sierpinski; 3) fractal por circunferências; 4) fractal do tipo árvore; 5) fractal quadrangular do tipo Dürer; 6) fractal do tipo árvore, 7) tapete de Sierpinski, 8) árvore pitagórica e 9) fractal de Cantor.

Figura 41 – Fractais clássicos construídos pelos cursistas Enfrac.



Fonte: Cursistas do Enfrac (2019).

Todos os participantes realizaram a construção de pelos menos um dos dez fractais clássicos e apresentaram a descrição de sua construção no fórum *online* do *Google Sala de Aula*. Alguns buscaram realizar suas construções baseando-se nos níveis presentes no fractal escolhido. Vejamos os passos da construção do fractal que foi identificado pelo número 9 na figura 42.

Figura 42 – Passos de construção do fractal 9 (figura 40) realizado por um cursista Enfrac.

- No nível zero tinha 27 cm
- Usei a ferramenta seguimento
- A direção foi a malha quadriculada
- No nível 1 foi dívida as 27 em 3 partes, de 9cm cada
- No nível 2 foi dividida o 9 em 3 centímetros cada
- No nível 3 foi dividida o 3 em 3 parte
- Em todo o processo foi utilizado a ferramenta seguimento

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os passos expressos na figura 42 indicam que esse cursista investigou esse fractal, observou e respeitou as características do fractal clássico e traduziu uma de suas representações mais simples. Ele partiu de um segmento de reta no nível zero, múltiplo de três, facilitando a construção desse fractal que possui como característica, a remoção de sua terça parte. Na verdade, desde já, sugerimos que a construção de qualquer fractal venha a ser desenvolvida desta maneira, associando ao processo de construção o estudo do fractal escolhido e a investigação matemática para a sua construção, pois, principalmente dessa maneira, os conceitos matemáticos emergem dessas estruturas irregulares.

De acordo com Pereira, Palharini e Damin (2016, p. 3-4) a investigação Matemática “pode ser entendida como uma das tendências metodológicas que compõe o campo de estudo da Educação Matemática”. Ainda segundo esses autores, o processo investigativo conduz os alunos a direcionarem seus recursos cognitivos e afetivos para um objeto e, por meio dele, instigar à formulação formularem “questões, conjecturas e realização de provas”.

Além de promover o diálogo sobre os resultados obtidos e a discussão com os colegas e professores sobre suas descobertas, a investigação matemática visa oportunizar aos alunos a liberdade para realizar as atividades matemáticas ou para “fazer Matemática” “de modo criativo, desenvolvendo a observação, a experimentação, a indução, a analogia, o raciocínio” e os incentivando a buscarem o conhecimento (BUENO; OLIVEIRA; ANDRADE, 2015, p. 557). Para Skovsmose (2008),

> Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado por seus ‘Sim, o que acontece se...?’ Dessa forma, os alunos se envolvem com o processo de exploração. O ‘por que isso?’ do professor representa um desafio, e os ‘Sim, por que isto...?’ dos alunos indicam que eles estão em busca de explicações. (SKOVSMOSE, 2008, p. 21).

Ainda para esse autor, “quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem”, aquele em que ele é o protagonista da construção de conhecimentos e não apenas o receptor de conhecimentos (SKOVSMOSE, 2008, p. 21). Dessa forma, entendemos que o *software GeoGebra* pode ser um valioso recurso tecnológico, capaz de convidar os alunos da Educação Básica a investigar os conceitos matemáticos presente nos fractais. Na realização das atividades com esse *software*, no qual as análises dos objetos são feitas por meio da manipulação digital, é possível ao aluno “entender o resultado de suas ações”, na medida em que investiga e formula conjecturas a partir de suas explorações (HENRIQUE, 2017, p.7).

Salientamos também que o *GeoGebra* “se torna um instrumento potente para a aprendizagem da Matemática quando o professor reconhece e explora o dinamismo do *software*” de arrastar e movimentar os objetos construídos (NOTARE; BASSO, 2017, p. 3). Isso possibilita, a partir de uma única construção, efetuar vários testes, modificações e observações, que seriam quase impossíveis com os instrumentos de medidas manuais, como régua, compasso e transferidor.

Outra forma, porém, de se construir os fractais utilizando o *software GeoGebra* é por meio da criação de novas ferramentas no próprio *software*. Trata-se de uma funcionalidade do *GeoGebra* que permite ao usuário criar uma ferramenta a partir de um dado objeto pré-definido. Dessa forma, com alguns cliques, o fractal pode ser gerado. Observemos, na figura 43, os passos seguidos por um dos cursistas na qual utilizou esse recurso do *GeoGebra*.

Figura 43 – Passos de construção do fractal 1 (figura 40) realizado por um cursista Enfrac.

Mural Atividades Pessoas Notas

Olá colegas de curso e professores,

O fractal que escolhi foi a ÁRVORE PITAGÓRICA, para essa construção usei os seguintes passos:

1) Primeiramente abrimos o GeoGebra.
2) Com a ferramenta Ponto coloque dois pontos sendo A e B
3) Selecione a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa. Clique no ponto A e depois em B, deixe com 45° no sentido Horário.
4) Clique em B até A com a mesma ferramenta, marque 45° no sentido Anti-horário.
5) Trace duas Retas, uma passando de A até B' e outro de B até A'.
6) Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos e marque as duas retas, gerando o ponto C. Conforme mostra a figura abaixo.
7) Oculte os pontos A' e B', as duas retas e os dois ângulos de 45°.
8) Com a ferramenta Polígono, trace um triângulo passando pelos pontos A, B e C.
9) Selecione a ferramenta Polígono Regular, clique nos pontos A e C e coloque 4 vértices. Faça o mesmo procedimento com os pontos C e B como também com os pontos em B e A.
10) Oculte os rótulos clicando com botão direito e na opção Exibir Rótulos. Conforme mostra a figura abaixo.
11) Retire a malha e altere a cor de cada quadrado como também do triângulo clicando com o botão direito e indo em Propriedades escolha a cor que desejar.
12) Selecione com o botão direito em volta do triângulo e quadrados menores. Conforme mostra a figura abaixo.
13) Vá no menu Ferramenta e na opção Criar uma Nova Ferramenta. Em Objetos Finais, selecione o Triângulo o Polígono pol1 e o Polígono pol3. Clique em próximo. Em Objetos Iniciais, clique em próximo novamente.
14) Nome da Ferramenta coloquei Árvore Pitagórica, Nome do Comando também ficou ÁrvorePitagórica e Ajuda da Ferramenta coloquei Triângulo e quadrado.
15) No Ícone coloquei a imagem da Árvore que tinha criado para isso tirei print da tela do GeoGebra, recortei e salvei em uma pasta. Em seguida fui em Ícone e na pasta onde salvei a imagem. Conforme mostra a figura abaixo.
16) Em seguida clique em Concluído, abrira uma janela com a mensagem Ferramenta Criada com Sucesso clique em OK. Podemos observar que a Ferramenta criada ficou localizada na barra de ferramentas.
17) Com a ferramenta Árvore Pitagórica selecionada, clique em dois pontos do quadrado no sentido horário para aumentar os lados da árvore.
18) E Para retirar os pontos clique com botão direito em Exibir Objetos. Assim Finalizo a construção.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Apesar do modo de construção do fractal apresentado na figura 43 agilizar o processo de construção dessa Árvore Pitagórica, acreditamos que essa construção no GeoGebra contempla menos conceitos matemáticos do que a proposta de construção da figura 42. Para que mais conceitos matemáticos sejam explorados ao se construir fractais neste *software*, indicamos que os docentes elaborem suas práticas para a Educação Básica com vista nos passos da figura 42, ou ainda, utilizando os passos da figura 23 em que apresentamos o triângulo de Sierpinski, para os cursistas, por meio de uma imagem e com passos específicos para a construção desse fractal nível à nível.

Ainda sobre o processo de construção de fractais utilizando o *software GeoGebra* como tecnologia mediadora do processo de ensino, destacamos algumas observações dos docentes. A primeira refere-se ao planejamento dos professores; a segunda, à iniciativa do professor de instigar os alunos a perceber os padrões ou as sequências presentes nos fractais; por último, a terceira, ao cuidado do docente com a apresentação do fractal construído.

Em relação à primeira observação, destacamos que ela também é válida para as demais aplicações de práticas de ensino da Matemática com os fractais. Antes de propor uma atividade de ensino da Matemática envolvendo a construção de fractais no *GeoGebra*, o professor deve planejar a(s) sua(s) aula(s), definindo os objetivos de ensino e levando em consideração o período, o ano ou a turma de ensino na qual seus alunos estão inseridos (se Ensino Fundamental Anos Inicias, Ensino Fundamental Anos Finais ou Ensino Médio). Logicamente, o ensino deve também respeitar as capacidades cognitivas dos alunos e, sempre que necessário, o docente deve se dispor a auxiliá-los no estudo dos fractais ou de investigações de conteúdos matemáticos.

Em relação à segunda observação, é importante referir que o papel do professor é instigar os alunos a perceber os padrões presentes nos fractais. Para isso, esse profissional deve permitir que todos realizarem suas construções de forma livre, errando, acertando e interagindo com seus colegas. O professor pode apresentar alguns passos de construção, como fizemos no Enfrac, mas, sobretudo, deve questionar e instigar os alunos constantemente durante o processo de construção. O objetivo é estimular a percepção de outros conceitos fora da geometria envolvendo a Matemática e a construção dos fractais.

Ao realizar a construção do fractal do triângulo de Sierpinski[12], por exemplo, primeira proposta de ensino realizada com o *software GeoGebra* no

[12]Apresentado na figura 22.

Enfrac, buscamos enfatizar apenas os conceitos geométricos ligados ao ensino de fractais. Entre os conceitos planejados para abordagem nessas práticas, estiveram os tópicos triângulo, ponto, reta, segmento de reta, polígono, teorema de Pitágoras e o reconhecimento de um fractal por suas características. De modo geral, os fractais apresentam um padrão que vale a pena ser observado e/ou estudado quando se aborda a sua geometria. Vejamos a tabela 1, desenvolvida com base no triângulo de Sierpinski.

Tabela 1 – Exemplos de atividades de matemática possíveis de serem aplicados ao se observar o fractal do triângulo de Sierpinski (baseado em um triângulo de lado 12).

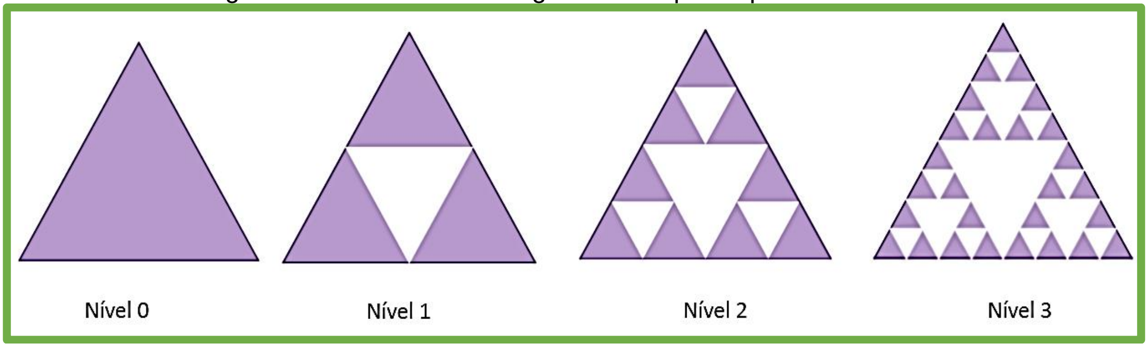
Nível (n)	**Número de triângulos pintados/ não retirados**	**Lado de cada triângulo (l)**	**Perímetro de cada triângulo**
0	1	12	36
1	3	6	18
2	9	3	9
3	27	1,5	4,5
...	...	...	...
$\boldsymbol{n}$	3^n	$\frac{l}{2}$	$l \cdot \frac{3}{2^n}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Estes são mais alguns dos exemplos de estudos envolvendo o fractal do triângulo de Sierpinski. Salientamos, ainda, que esta tabela se baseou no triângulo de lado 12 cm, apresentado aos cursistas Enfrac para o estudo dos dados dos níveis 1, 2 e 3. Como continuidade dessa atividade, foram realizados outros estudos envolvendo outros conteúdos da Matemática, além dos relacionados à geometria, tais como contagem, potência, generalização matemática, funções, perímetro, entre outros.

Por fim, a terceira observação que destacamos em relação ao processo de construção de fractais clássicos no *GeoGebra* diz respeito ao cuidado dos docentes com a apresentação do fractal que será construído para os alunos. Orientamos que se apresente uma imagem do fractal que será construído e que se instigue aos alunos a realizarem a construção dos fractais por meio da investigação de seus diferentes níveis. Uma ideia é realizar a sua prática de forma similar, talvez, com a prática de construção do triângulo de Sierpinski que realizamos no Enfrac. Apresentamos o fractal da figura 44 para os cursistas.

Figura 44 – Fractal do Triangulo de Sierpinski por seus níveis.



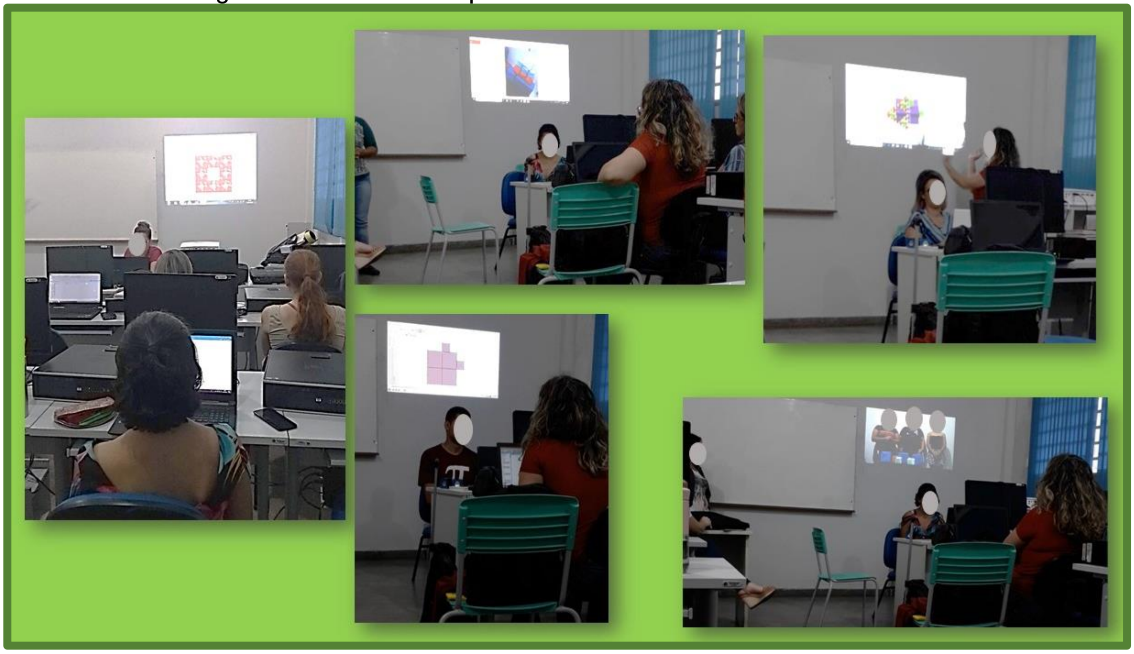
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Aconselhamos ainda que essa imagem seja apresentada de nível em nível, para que os alunos consigam perceber melhor os padrões presentes no fractal. Por exemplo, se o professor desejar que o aluno construa o nível 0 do fractal, deve-se apresentar apenas a imagem do nível 0; depois que todos os alunos construírem esse nível, pede-se que eles construam o nível 1, mostrando a respectiva figura – e assim sucessivamente. Com isso, os alunos realizarão a tarefa proposta em tempos similares, o que favorece a interação e a troca de conhecimentos entre eles. Outra vantagem de se apresentar as imagens dos fractais é que se diminuiu a sensação de que construir o fractal é uma tarefa difícil ou impossível de ser executada e instiga-se a curiosidade do aluno de descobrir qual será o próximo nível dessa estrutura.

Antes de propor uma atividade de construção de fractais com o *software GeoGebra*, é necessário que o próprio professor construa essa estrutura, para que conheça o fractal e venha planejar suas aulas com propostas de ensino pré-estabelecidas. Ele deve planejar as suas aulas definindo o(s) conteúdo(s), seus objetivos de ensino e indicar passos de construção para auxiliar seus alunos nas investigações matemáticas acerca do fractal. A sua supervisão é importante em todas as etapas, para que os alunos não só desenvolvam as habilidades de construção, mas também os conhecimentos matemáticos envolvidos. Por outras palavras, eles devem ser conduzidos a construírem seus próprios conhecimentos por meio da exploração e investigação matemática de suas construções.

Além de apresentar os resultados das atividades para os demais cursistas, os participantes do Enfrac deveriam comentar sobre como utilizariam o vídeo em uma situação real de sala de aula com os alunos – ou seja, o que eles, enquanto profissionais, sugeririam propor como atividades envolvendo os fractais em seus planejamentos. Além disso, os participantes deveriam comentar sobre os passos de sua construção de fractais no *GeoGebra*. A seguir, a figura 45 apresenta registros dessas apresentações.

Figura 45 – Cursistas apresentando os trabalhos no Módulo IV.



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Acreditamos que a apresentação dos trabalhos realizados pelos cursistas no Módulo III, de forma presencial, contribuiu para que eles pudessem rever as suas construções e comentar sobre suas angústias durante o processo de construção de fractais no *GeoGebra e* para a produção de vídeos. Além disso, foi possível trocar experiências, o que fez enriquecer as visões para o ensino dos fractais e as aprendizagens envolvidas no processo de construção realizados por eles.

Depois das apresentações, para discutir e responder ao questionário III, os participantes foram divididos em grupos, segundo as diferentes etapas de ensino já referidas anteriormente (Efai, Efaf e EM). Em seguida foi realizada uma roda de conversa (figura 46) para avaliarmos o curso e retomarmos e discutirmos de forma aberta algumas questões relacionadas às percepções de ensino observadas pelos cursistas quanto ao ensino de fractais na Educação Básica. Sendo assim, entre outras questões, foram discutidos os seguintes tópicos: possibilidades de abordagem dos fractais; uso de tecnologias digitais no ensino de fractais; o uso do *software GeoGebra* no ensino dessas estruturas.

Figura 46 – Roda de conversas.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A última atividade do curso consistiu em construir um caleidoscópio no formato de um prisma triangular regular, encapado com papel color 7 e decorado com miçangas coloridas em uma de suas bases. Os cursistas se mostraram empolgados em construir esse instrumento. Durante essa atividade, os professores que apresentavam menos habilidades com os recursos tecnológicos se mostraram mais habilidosos com os procedimentos manuais, finalizando a construção de forma mais rápida do que os que tinham mais habilidades com as tecnologias digitais.

Pôde-se perceber também que todos os cursistas ficaram encantados com os fractais que criaram – eles acabaram ficando em sala de aula mesmo após o curso ter ultrapassado o horário previsto. Um participante comentou, referindo-se ao caleidoscópio: “Ainda bem que não fui embora, achei muito legal esse instrumento". A figura 47 a seguir mostra os cursistas empolgados ao visualizar seus caleidoscópios.

Figura 47 – Cursistas observando fractais no caleidoscópio.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dessa forma, os participantes do Enfrac se despediram do curso, levando consigo um instrumento criado por eles mesmos, capaz de mostrar diferentes fractais.

5.3 Avaliação do curso Enfrac

Após a realização das atividades relacionadas ao ensino da Matemática com fractais propostas no Enfrac para os professores que atuam (ou que atuariam) na Educação Básica, buscamos identificar se essas propostas poderiam ser replicadas ou adaptadas na prática. Essa etapa de avaliação do curso vai ao encontro de um dos objetivos de pesquisa deste trabalho – o de compreender quais foram as contribuições do Enrac para a prática docente dos participantes. Salientamos que o público-alvo do curso foram professores graduados, ou seja, adultos – alguns apresentavam mais de dez anos de sala de aula. Logo, a nossa proposta metodológica de ensino precisou levar em consideração a trajetória pedagógica geralmente vivenciada por nós licenciados antes de 2010 – a presença dos materiais manipuláveis no processo de graduação era marcante na formação de várias gerações de professores no

Brasil, em contraponto à utilização dos recursos digitais era pouco utilizada como recursos de ensino.

Já no que diz respeito ao ensino da Matemática com fractais para alunos da Educação Básica, entendemos que essas práticas devem ser idealizadas com base no uso das tecnologias digitais como recursos metodológicos para as ações pedagógicas. Dessa forma, coube-nos investigar qual foi a percepção dos cursistas quanto ao uso das tecnologias digitais no processo de ensino realizado no Enfrac (que será descrito na seção seguinte) e ainda compreender como eles vêm os recursos tecnológicos e os manipuláveis no ensino da matemática com fractais. Além disso, buscamos avaliar quais foram as contribuições do Enfrac para a formação desses cursistas.

Para a avaliação das propostas do curso, levamos em consideração as respostas aos questionários individuais I e II respondidos pelos cursistas (disponíveis nos apêndices deste trabalho). Foi possível perceber que o curso Enfrac contribuiu, de fato, para o enriquecimento do conhecimento dos participantes. Nas respostas ao questionário I, as duas professoras pedagogas relataram que nunca tinham ouvido falar sobre a geometria Fractal ou mesmo sobre os fractais em suas Graduações. Apenas três dos sete professores de Matemática alegaram ter estudado tais estruturas em seus processos formativos (questões 5 e 6). Na questão 3 do questionário II, os cursistas foram indagados acerca dos seus conhecimentos prévios sobre os fractais – a maioria também relatou que não havia estudado esse conteúdo na Graduação. Aqueles que o fizeram afirmaram que esse estudo não foi suficiente.

> **P2:** *Por meio das atividades propostas, adquiri conhecimentos importantes sobre os fractais. Não havia estudado sobre os fractais até o momento.*
> **M1:** *Hoje, posso dizer que aprendi muito com o curso. Só conhecia um único fractal, que era o triângulo de Sierpinski. Através do curso, passei a conhecer vários outros fractais.*
> **M7:** *Meu conhecimento sobre fractal é estreito, não estudei na Graduação. Mas o curso me abriu horizontes e vou utilizar muitas das ferramentas nos próximos anos em sala de aula.*
> **M6:** *Foi muito bom! Agora por todos os lugares que olho, vejo um fractal – o nível de visualização está bem melhor.*
> **M5:** *O meu conhecimento foi ampliado com o curso, pois não sabia dos nomes e dos tipos de fractais e como cada um poderia ter aplicação em sala de aula, relacionando com conceitos matemáticos e aplicações.*

Ainda com base nesse questionário II, constatamos que o Enfrac foi a oportunidade na qual os participantes mais adquiriram conhecimentos sobre os fractais. Essa ideia foi reforçada na roda de conversa. Nela, foi possível perceber que os cursistas gostaram muito da forma com que o curso foi estruturado, dando foco às atividades práticas. O curso foi desenvolvido de forma híbrida, *online* e presencial, o que também agradou aos participantes.

A parte teórica foi disponibilizada para a consultada na plataforma do *Google Sala de Aula.* Dessa forma, esses professores cursistas do Enfrac conseguiram visualizar, perceber e fazer, na prática, atividades que poderiam ser aplicadas em suas práticas pedagógicas. A exemplo disso, destacamos os relatos apresentados pelos cursistas em resposta à questão número 4 do questionário II. Nela, questionou-se acerca de quais atividades os participantes mais haviam gostado, a ponto de pensarem em reproduzi-las ou adaptá-las nas suas práticas de ensino da Educação Básica. Vejamos as respostas:

> **M3:** *Uma das práticas de ensino que achei interessante com os fractais foi a construção de cubos por dobraduras – inclusive apliquei com meus alunos do 6.º ao 9.º ano.*
> **M7:** *Me identifiquei muito com todas as atividades, estou empolgada com o curso e vou utilizar esse conhecimento para os próximos anos.*
> **M4:** *Aplicaria tanto os fractais no* GeoGebra *quanto o joguinho que o professor Fabio apresentou.*
> **P1:** *A produção de cubo e construção de fractais, pois contempla arte e Matemática. Foi [com] o que identifiquei mais.*
> **M1:** *Me identifiquei com várias práticas, mas a que mais me chamou a atenção é trabalhar potenciação, descobrir a base das potências utilizando os fractais. Achei muito interessante!*

Durante o curso, ouvimos muitos “Nossa! Isso eu vou aplicar com os meus alunos!”, ou ainda “Que legal! Vou mostrar para meus alunos!”. Desse modo, entendemos que, sim, as práticas apresentadas podem fazer parte do processo de ensino da Matemática com fractais para alunos da Educação Básica. Outro resultado importante constatado durante a avaliação do curso, foi a ampliação dos conhecimentos dos cursistas sobre o uso das tecnologias digitais em sala de aula. Alguns professores se mostraram mais habilidosos do que outros ao utilizarem o *GeoGebra*. Porém, todos consideraram importante a utilização desses recursos no processo de ensino. Um dos cursistas, na resposta à questão do questionário II, associou o ensino de fractais com o de tecnologias digitais – como se o estudo daqueles estivesse intimamente ligado a estas.

> **M3:** *Utilizar os fractais como uma proposta metodológica de ensino [...] traz o uso das tecnologias para a sala de aula. Sabemos que hoje as tecnologias são uma ferramenta fundamental para o uso de aula diferenciadas.*

No que diz respeito à formação continuada de professores para o uso das tecnologias digitais, acreditamos que essa fala reflete outro resultado positivo do curso. Segundo Bozza, Sauer e Missell (2016), as tecnologias digitais proporcionam ao estudante a oportunidade de realizar várias atividades de aprendizagem de forma simultânea. Além disso, possibilitam ao aluno relacionar conceitos, promovendo a interação entre professor, aluno, conhecimento e tecnologia. Isso tudo faz com que o processo de ensino e aprendizado se torne "uma atividade experimental que encoraja os estudantes a desenvolver a capacidade crítica, de investigação, discussão e exploração de conceitos, sendo o professor o coordenador das ações" (BOZZA; SAUER; MISSELl, 2016, p. 253).

Borba, Silva e Gadanidis (2016, p. 17) comentam que ainda que "as dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação". Nesse processo, o aluno não é mero expectador, que assiste passivo à aula; ele se coloca como protagonista na produção de seus próprios conhecimentos. Segundo Fava (2018),

> A educação, necessita de alguma forma, adotar os princípios da cultura de tela, adaptar-se as tecnologias que poderão permitir que os alunos aprendam mais rapidamente conceitos, consigam aplicar e desenvolver habilidades, como discernir, escolher e decidir. Os docentes necessitam aprimorar as técnicas instrutivas, o compartilhamento de metodologias, o compartilhamento de conhecimentos. [...] A cultura da tela permitirá maneiras novas, disruptivas, quem sabe melhores, de ensinar, estudar, aprender, e criará possibilidades além do limite da nossa imaginação. Para usufruí-las, os educadores e gestores deverão estar de mente e corão abertos a todas essas possibilidades. (FAVA, 2018, p. 73)

Assim, com base nos planos de aula elaborados pelos cursistas, na experiência vivenciada no cursos de desenvolver vídeos para a suas aulas, além das respostas observadas nos questionários e na roda de conversa realizada após o curso, compreendemos que as práticas apresentadas durante o curso Enfrac envolvendo os recursos digitais contribuíram para a formação dos docentes, especialmente no que tange à reflexão sobre as práticas de ensino adotadas. A utilização do ensino híbrido, outra proposta metodológica adotada durante o Enfrac, foi pensada no intuito de apresentar e até mesmo fomentar a utilização desse recurso digital de ensino nas práticas dos cursistas.

Sobre essa proposta de ensino híbrido, houve comentários no sentido de que, se o curso fosse totalmente presencial, talvez houvesse mais aproveitamento. Por outro lado, muitos também afirmaram que, se o curso não fosse em parte à distância (semipresencial), talvez eles não tivessem se inscrito. Dessa forma, conseguimos perceber a necessidade de pelo menos alguns encontros presenciais no contexto do ensino à distância, sendo que essa modalidade é, de fato, tendência no ensino atual. Ela consegue romper com as distâncias físicas, representa economia financeira e dá liberdade ao estudo, não prendendo os alunos a horários.

Assim, com bases nesses relatos, pelas observações realizadas durante o curso e por meio da roda de conversa, entendemos que o curso Enfrac contribuiu com a formação desses docentes, em pelo menos três aspectos: em seus autoconhecimentos sobre os fractais, com a aquisição de conhecimentos pedagógicos para ensinar fractais e com a ampliação dos seus conhecimentos sobre o uso das tecnologias digitais em sala de aula.

5.4 Percepções do Enfrac sobre como abordar o ensino da Matemática com fractais na Educação Básica

Neste trabalho, buscamos compreender como abordar a geometria Fractal no ensino da Matemática da Educação Básica. Para isso, apresentamos aos cursistas do Enfrac algumas propostas de ensino que envolveram recursos didáticos manipuláveis e digitais. No decorrer das atividades, além de observar as formas com as quais os participantes interagiam com as propostas de ensino apresentadas a eles, buscamos registrar por imagens, por gravações de áudios e por meio de observações da resolução das atividades pelos cursistas, as respostas para o objeto de pesquisa deste trabalho.

Além disso, outros dois instrumentos formam fundamentais para que pudéssemos analisar como abordar a geometria Fractal no ensino da Matemática para a Educação Básica. Trata-se dos questionários individuais I, II e III, respondidos em grupo, de acordo com os níveis de ensino da Educação

Básica (Efai, Efaf e EM), e da roda de conversa, na qual algumas questões foram retomadas no intuito de ampliar os dados já coletados. Sendo assim, nesta seção destacaremos algumas das percepções que emergiram do curso Enfrac a respeito do ensino da Matemática com fractais para a Educação Básica.

Na questão número 7 do questionário individual II, buscamos perceber se os participantes consideravam que o ensino dos fractais deveria estar presente no currículo da Educação Básica. Em consonância com Gouvea (2005), Faria (2012), Bagio (2014) e Reis (2014), entre outros autores, nos relatos do quadro 1, é possível perceber uma posição favorável a essa inserção curricular. Como comenta Gouvea (2005, p. 167), a geometria Fractal “pode ser perfeitamente inserida nos currículos escolares (Ensino Fundamental e Médio)”, ou seja, na Educação Básica. Todas as respostas estão apresentadas no quadro 1.

Quadro 1 – Respostas à questão 7 do questionário individual II.

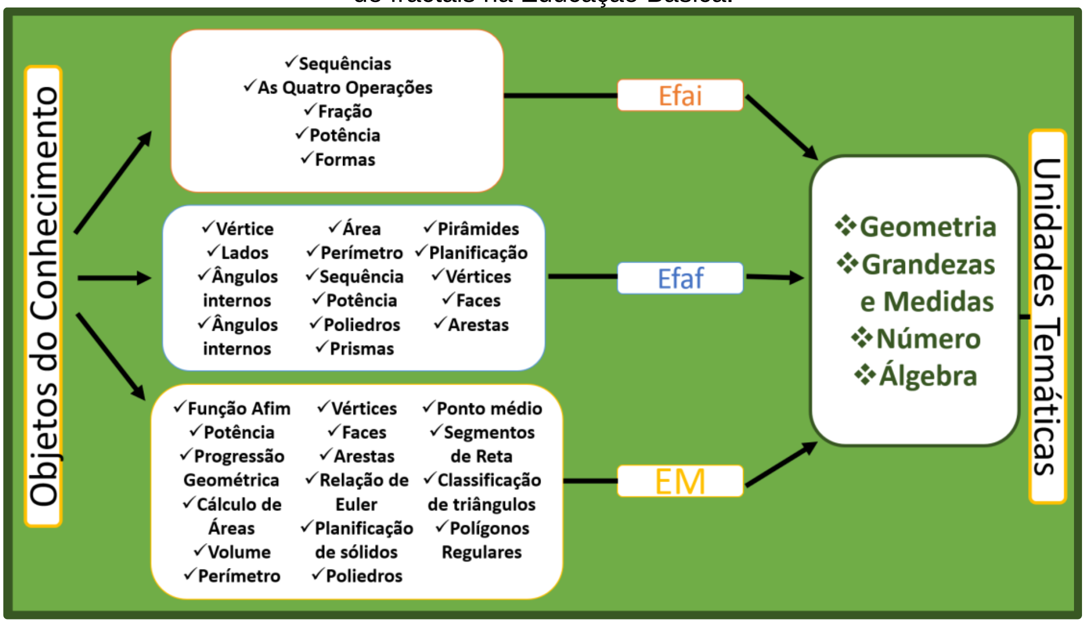
Professor (cursista)	Respostas à questão 7: Você considera que os fractais devem esta presentes no currículo da Educação Básica? Justifique.
P1	*Sim, porque trabalham a observação detalhada de vivências naturais, do dia a dia, o que colabora com o raciocínio lógico, coordenação motora fina, psicomotricidade, entre outros.*
P2	*Sim, porque apresentam curiosidades que podem aguçar nossos alunos a buscarem respostas para a arte, formar os cubos etc.*
M1	*Sim, os fractais devem estar presentes no currículo da Educação Básica. Assim, os alunos já passam a conhecer que aquela figura geométrica ou aquele objeto é um fractal. Muitas vezes, nem os próprios professores têm essa informação do que é um fractal e onde ele é encontrado.*
M2	*Sim, pois possibilitam a utilização de materiais concretos para melhorar a compreensão, auxiliam no raciocínio lógico matemático.*
M3	*Suponho que podem ser um recurso muito interessante para o ensino da Matemática, pois tem conteúdos que os fractais podem esclarecer com mais propriedade. Existem figuras geométricas que não têm uma forma definida, então podem chamá-las de fractais.*
M4	*Sim, pois o aluno consegue perceber o manipulativo para os digitais.*
M5	*Sim, nos livros didáticos não há tanta abordagem. Essa geometria possui diversas potencialidades para o ensino da Matemática.*
M6	*Sim, pois eles auxiliam no ensino de diversas áreas da Matemática de uma maneira bem visual.*
M7	*Sim, pois está associado a vários outros conteúdos matemáticos.*

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A posição favorável dos cursistas Enfrac, ao considerarem importante o ensino de fractais na Educação Básica, expressas nas respostas do quadro 1, provavelmente se justifica pelo fato de essas formas estarem presentes em diversas representações da natureza, tais como plantas, montanhas, movimento das ondas etc., em alguns objetos, tais como figuras geométricas, representações artísticas e cenários digitais, ou ainda em situações sociais, como, por exemplo, no comportamento das bolsa de valores, na Teoria do Caos, entre outras aplicações e curiosidades apresentadas no capítulo 2 deste trabalho. E isso foi melhor identificado através da roda de conversa, onde alguns cursistas relataram que pela aproximação dos fractais com representações da natureza é que se faz necessário utilizar alguns materiais manipuláveis, objetos que auxiliem o aluno a relacionar a geometria fractal com a natureza.

Percebemos também que, ao se estudar os fractais, é possível abordar vários outros conteúdos da Matemática, buscamos identificar, durante o curso Enfrac, quais conteúdos seriam esses, além daqueles referentes à geometria Fractal. Para isso, elaboramos a questão 2 do questionário III, aplicada em grupo. Nela, foi solicitado aos cursistas que identificassem conteúdos de Matemática (ou objetos do conhecimento matemático) que poderiam ser abordados juntamente com os fractais. É importante mencionar que a roda de conversa e as observações realizadas durante o desenvolvimento das atividades do curso também contribuíram para as nossas percepções sobre esse aspecto da pesquisa. Buscamos sintetizar tais percepções na figura 48.

Figura 48 – Objetos do conhecimento matemático mencionados pelos cursistas para o ensino de fractais na Educação Básica.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os objetos do conhecimento[13] matemático destacados na figura 47, identificados pelos cursistas Enfrac, abrangem quase todas as unidades temáticas apresentadas na BNCC, com a exceção da Probabilidade e Estatística. Destacamos que, apesar disso, essa unidade pode, sim, ser explorada, por exemplo, no jogo do caos[14], ou no jogo triângulo de Pascal, ambos apresentados no início deste trabalho.

Embora consideremos que os fractais devam fazer parte do currículo da Educação Básica, salientamos que a inserção dos fractais no processo de ensino (ou no currículo da Educação Básica) não deve ser vista como mais um conteúdo que o aluno terá que estudar. Esse tópico deve ser apresentado como uma "ponte para diversas ligações entre disciplinas (geometria, arte, Biologia, etc.) e entre os próprios conteúdos presentes na matemática (articular geometria e álgebra, geometria e tratamento da informação, etc.)" (BAGIO, 2014, p. 248).

Nas respostas dos cursistas, outra possiblidade de abordagem para o ensino de fractais que identificamos foi aquela envolvendo o uso das tecnologias digitais. Sendo assim, na questão 6 do questionário individual II, buscamos identificar quais das seguintes atividades os cursistas consideravam mais relevantes para o Ensino Básico: as práticas com as tecnologias digitais ou aquelas sem esses recursos tecnológicos, as quais também propusemos no Enfrac. As repostas podem ser observadas no quadro 2.

Quadro 2 – Respostas à questão 6 ao questionário individual II.

Professor (cursista)	**Respostas à questão 6: No curso Enfrac, foram apresentadas práticas utilizando tanto os recursos digitais como os não digitais. Com quais recursos você entende que o ensino desse tópico deve ser abordado? Justifique.**
P1	*Entendo que deve ser abordado essencialmente pelos recursos digitais, porque nossos alunos entendem muito da era digital e precisamos trabalhar com jogos que apresentem conteúdos que necessitam ser trabalhados.*
P2	*Com os dois recursos, pois, em muitas escolas, não possui laboratório de informática e, na falta, usa-se os recursos não digitais.*
M1	*Os recursos digitais chamam mais atenção para o professor e principalmente para os alunos, já que, nos dias de hoje, a tecnologia está cada vez mais presente no nosso cotidiano. Os recursos não digitais, ou seja, os concretos também são válidos, mas não chamam tanto a atenção dos alunos como o recurso digital.*

[13]Expressão utilizada pela BNCC para aludir a conteúdos.
[14] Essa prática foi usada neste trabalho como uma curiosidade dos fractais, adaptada de Nunes (2006), Rabay (2013), Adami (2014), entre outros. Os passos de construção no *GeoGebra* estão disponíveis no anexo I deste trabalho.

M2	*Ambos os recursos são importantes para uma boa aprendizagem. Eu particularmente prefiro abordar os fractais enquanto material manipulativo. Acredito que auxilia no raciocínio, visualização, pois aluno adora pôr "a mão na massa".*
M3	*Acredito que os recursos digitais e não digitais devem andar em paralelo, pois a visualização com materiais manipuláveis pode ser utilizada junto com a tecnologia: mostrar no computador, ou seja, utilizando o software* GeoGebra *e depois mostrar na prática.*
M4	*Para melhor entendimento, recursos digitais.*
M5	*Diante da necessidade, pois nem sempre terei o Laboratório de Informática à disposição. Creio que primeiro devemos utilizar recursos concretos e depois mostrar que a tecnologia facilita as construções e representações.*
M6	*Acredito que as duas formas eles podem ser apresentados de maneira que prenda a atenção do aluno. Com os não digitais, gostei da ideia de trabalhar com a Educação Infantil com o uso do lúdico.*
M7	*Eu infelizmente não sou "alfabetizada" tecnologicamente e, com isso, fico limitada, mas isso não vai me impedir de estudar para aprender e utilizar tanto os recursos digitais e não digitais.*

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ao analisar tais respostas, podemos perceber que alguns professores comentam que o ensino de fractais deve ser abordado tanto por meio dos recursos didáticos manipuláveis quanto pelos digitais. Já outros consideram fundamental a utilização dos recursos digitais, pois eles reconhecem a importância de se utilizar essas tecnologias no século XXI. Podemos interpretar as percepções dos cursistas – de que o ensino da Matemática deva ser realizado com os recursos manipuláveis – da seguinte forma: em primeiro lugar, falta a esses profissionais formação para atuarem com os recursos tecnológicos, confirma deixa explícito a professora M7: "não sou 'alfabetizada' tecnologicamente". Além disso, a falta de recursos digitais nas escolas tem contribuído para que os professores planejem as suas práticas sem o uso das tecnologias digitais, como expresso nas seguintes falas: "em muitas escolas não possui Laboratório de Informática e, na falta, usa-se os recursos não digitais" (P2) e "nem sempre terei o Laboratório de Informática à disposição". Muitos cursistas também consideram que ambas as formas de abordagem são válidas. O professor M6 afirmou: "Acredito que as duas formas eles podem ser apresentados de maneira que prenda a atenção do aluno".

Pensando no estudo dos fractais e na importância de sua inserção para a Educação Básica, podemos destacar o fato de essas estruturas englobarem grande parte das formas presentes na natureza. Talvez por esse motivo, os cursistas consideram que elas podem ou devem ser trabalhadas com os recursos não digitais: materiais concretos, manipulação de objetos ou a visualização de objetos ou formas da natureza. Como comentado anteriormente, eles reconhecem, ainda assim, a necessidade da utilização das tecnologias digitais no século XXI.

Contudo, analisando as percepções da maioria dos cursistas, conforme expressos no quadro 2, especialmente pelos professores P2, M1, M2, M3, M5, M6 e M7, e ainda considerando as discussões travadas durante a roda de conversa, podemos afirmar que, no geral, os participantes entendem que ambos os recursos, manipuláveis e digitais, são válidos para o ensino da Matemática com fractais. Defendemos que os recursos manipuláveis são, sim, importantes para esse ensino, mas as crianças, os adolescentes e os jovens deste século são nativos digitais, ou seja, já nasceram em um mundo dominado pela Internet e "habituaram-se a usar jogos eletrônicos, a produzir, interagir e compartilhar informações por meio de redes sociais e a utilizar dispositivos móveis" em suas interações sociais (ALMEIDA, 2011, p. 5). Desconsiderar essa realidade atual, provavelmente significaria desperdiçar a possibilidade de potencializar os processos de aprendizagem desse público-alvo.

A tecnologia que utilizamos com maior frequência no Enfrac foi o *GeoGebra*. Sendo assim, na questão 5 do questionário II individual, buscamos perceber como os professores avaliavam essa tecnologia para o ensino de fractais. Os relatos podem ser conferidos a seguir no quadro 3.

Quadro 3 – Respostas à questão 5 do questionário individual.

Professor (cursista)	**Respostas à questão 5: Como você avalia a construção de fractais no software GeoGebra? Auxilia os alunos a aprenderem conceitos matemáticos? Se sim, quais?**
P1	*No* GeoGebra, *a construção de fractais foi essencial para mostrar que as divisões precisam ser exatas.*
P2	*Muito bom! Auxilia e muito o ensino-aprendizagem, considerando que recursos tecnológicos prendem a atenção e despertam interesses nos alunos. Os conceitos matemáticos são soma, potência, subtração, multiplicação, medidas, entre outros.*
M1	*Através do* software GeoGebra *podemos observar a construção dos fractais com mais clareza, ficando mais visível o passo a passo. Auxilia muito os alunos com conceitos matemáticos, onde as ferramentas do* software *já trabalham conceitos matemáticos.*
M2	*O* software *auxilia muito na aprendizagem. Já pelo fato de ser uma aula diferenciada, que sai do tradicional,* GeoGebra *é rico em conceitos*

	matemáticos. [Tem] muitas ferramentas, principalmente para se aprender a geometria com uma melhor visualização.
M3	*Uma proposta muito interessante, pois os fractais podem ser construídos no* software GeoGebra *e dá para explorar vários conteúdos matemáticos, como: cálculo de área, identificação de faces, arestas e vértices. Esses conteúdos explorei em sala com alunos do 6.º ao 9.º ano.*
M4	*Utilizar o programa* GeoGebra *auxilia o aluno verificar maneiras diversificadas [para a] resolução de exercícios, principalmente gráficos e fractais. Dá para trabalhar ponto, distância entre dois pontos, segmentos de reta, ângulos, entre outros.*
M5	*As construções foram um pouco complicadas, quando se havia a necessidade de criar mais passos. Por isso a utilização de uma ferramenta ajuda. A utilização do* software *maximiza os conceitos aprendidos em sala.*
M6	*Muito bom, o* software *é fácil acesso e de boa visualização. Gostei para o ensino de generalização, potência, sequência, área, volume, entre outros.*
M7	*Eu estou adorando o* GeoGebra*, mas falta eu aprender muito ainda... Mas vai auxiliar muito para o processo de aprendizagem dos alunos.*

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com base nesses relatos, foi possível perceber que os professores consideram o *software GeoGebra* um bom recurso tecnológico para se estudar os fractais. Para alguns, esse *software* foi “essencial para mostrar que as divisões precisam ser exatas” (P1), ou seja, para abordar os conceitos matemáticos ligados aos fractais, por meio da construção dessas estruturas nesse *software*. Foi possível identificar ainda que, por meio das construções no *GeoGebra*, os cursistas conseguiram perceber com maior facilidade outros conteúdos da Matemática, possíveis de serem abordados na Educação Básica. Como exemplo disso, temos o relato de M6, que disse: “Gostei [do *GeoGebra*] para o ensino de generalização, potência, sequência, área, volume, entre outros”. Essa constatação também se evidenciou nas apresentações das construções de fractais realizadas nesse *software*.

De fato, durante as atividades do curso e nas apresentações das atividades realizadas *online*, a utilização do *software GeoGebra* mostrou-se útil tanto para complementar as atividades manuais quanto para ser utilizada de forma individual. É importante perceber, nesse contexto, que, em ambos os casos, para convidar os alunos a participar do processo de construção de conhecimentos matemáticos, as atividades realizadas no Enfrac tiveram que estar pautadas na investigação matemática.

Enquanto cada cursista apresentava os seus fractais feitos no *GeoGebra*, os demais cursistas iam sugerindo: “Olha, dá para trabalhar tal conteúdo com este fractal” (como os expressos na figura 47). Dessa forma, entendemos que a atividade de no *software* teve um papel fundamental para que os participantes conseguissem identificar os objetos do conhecimento matemático que podem ser explorados na Educação Básica. Ainda sobre o ensino da matemática com esse *software*, Reis (2014) comenta que

> Uma das principais vantagens no uso do *GeoGebra* é a possibilidade de professores e alunos trabalharem em um ambiente de Geometria interativa. É possível fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, círculos e polígonos em geral, bem como funções, podendo ainda mudá-las dinamicamente e plotar gráficos interativos. (REIS, 2014, p. 37).

Durante as interações dos cursistas acerca do *software* em questão, uma das participantes declarou: “Utilizei o *software GeoGebra* apenas na Graduação. Ao realizar novamente as construções dos fractais nele, me lembrei o quanto ele pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática” (excerto da roda de conversa). Dessa forma, em se tratando dos benefícios do *GeoGebra* para o ensino da matemática com fractais, concordamos com Pereira, Palharini e Damin (2016, p. 13), quando ao autores afirmam que esse *software* pode contribuir para “a formação inicial de professores, para a construção de conhecimentos”, aumentar a predisposição dos alunos em realizar as atividades de sala de aula e para dar uma “visão crítica para o ensino e para aprendizagem”.

Diante disso, compreendemos que as percepções levantas pelos cursistas Enfrac quanto ao nosso objetivo de pesquisa – como abordar práticas de ensino da matemática com fractais para a Educação Básica – se centraram em metodologias de ensino voltadas para o uso de recursos manipuláveis, mas, sobretudo, para as propostas envolvendo os recursos digitais: jogos, construção de fractais no *GeoGebra*, criação de vídeos, entre outros aspectos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou compreender como abordar a geometria Fractal no ensino da Matemática para a Educação Básica. Para isso, foi realizado um curso de ensino, o Enfrac, que se destinou a professores que ensinavam Matemática na Educação Básica do estado de Mato Grosso. Realizado de forma semipresencial, com encontros presenciais no *campus* da Unemat de Barra do Bugres e aulas à distância na plataforma do *Google Sala de Aula*, o Enfrac apresentou aos professores cursistas atividades de ensino sobre fractais direcionadas para o público da Educação Básica.

Como estratégia metodológica do curso, foram usados recursos didáticos manipuláveis e digitais. Os recursos manipuláveis utilizados foram cubos com dobraduras, pirâmide fractal e caleidoscópio. Já os recursos digitais consistiram na produção de vídeos, na construção de fractais no *software GeoGebra* e na apresentação de jogos digitais de aprendizagem. Ao avaliarem os recursos manipuláveis e digitais apresentados durante o curso, a maioria dos cursistas considerou que ambos são relevantes para o ensino na Matemática com fractais e podem ser utilizados com alunos da Educação Básica. Os professores participantes da pesquisa entendem que os recursos manipuláveis não podem ser apresentados de forma isolada, sem a utilização dos recursos digitais.

O uso dos materiais manipuláveis não foi descartado pelos cursistas. Eles consideraram que ambos os recursos (manuais e tecnológicos) podem ser utilizados para o ensino da Matemática com fractais. Segundo os participantes, o uso dos materiais manipuláveis auxilia os alunos na compreensão de novos conhecimentos e na melhor identificação dos conceitos abordados nas aulas. Como pesquisadores, também consideramos que ambos os recursos podem ser úteis para o ensino dos fractais. Porém, sobretudo na Educação Básica, etapa na qual se encontram crianças, adolescentes e jovens que estão imersos no mundo da tecnologia ou que acompanham as inovações tecnológicas com maior intensidade e rapidez do que a maioria dos adultos, lidar apenas com os recursos manipuláveis significaria ignorar a realidade desse público-alvo, entrando em choque com as identidades construídas por eles em seu contexto social e promovendo um desequilíbrio entre ensino e aprendizagem. Assim, os alunos poderiam ficar desmotivados ou desviar a atenção para os recursos tecnológicos disponíveis para eles durante uma aula tradicional (por exemplo, o celular).

Através do curso percebemos que tanto para os professores pedagogos quanto para os matemáticos, os conhecimentos apresentados sobre os fractais eram algo novo. Reafirmando os dados apresentados pela literatura de que poucos professores conhecem essa geometria e que por consequência o ensino dos fractais é pouco disseminado nos ambientes de ensino da educação básica atual do Brasil.

Outro dado emergido do curso Enfrac que nos interessou, mesmo não sendo o foco de nossa pesquisa, é que muitos professores não utilizam os recursos tecnológicos no ensino, como o GeoGebra, pois desconheciam esses recursos ou não foram ambientados durante a sua graduação sobre como utilizar esses recursos nos espaços educacionais. Por um lado, eles se deparam com a necessidade de incluir esses recursos no processo de ensino e de possibilitar ao estudante da educação básica a valorização de suas experiências com os recursos digitais, e por outro, a falta de conhecimento tecnológico e de formação para atuar com esses recursos, torna-se um dos agravantes para o seu desuso em sala de aula.

Diante da carência de formação para lidar tanto com os fractais quanto com as tecnologias digitais, compreendemos que o ensino da matemática com os fractais aliado ao uso das tecnologias digitais pode se tornar um desafio ainda maior para aqueles docentes que aceitam o desafio de implementar o ensino da matemática com fractais e com tecnologias digitais, em suas práticas. Contudo, acreditamos que aceitar esse desafio, além de proporcionar a esses estudantes a oportunidade de estudar diferentes tipos de geometria, favorecer ao estudo de outras unidades temática da matemática, tornar o ambiente de aprendizagem mais propício para a aprendizagem, pois estarão envolvidos com recursos tecnológicos, e ainda, significa valorizar os saberes tecnológicos dos estudantes quando se apresenta os recursos digitais nas aulas.

Nesse sentido, se for o caso, sugerimos que os recursos manipuláveis existentes para o ensino da Matemática com fractais sejam utilizados, mas combinados e adaptados aos recursos tecnológicos. Não se trata de uma substituição, mas de sinergia, de modo a tirar proveito do melhor que ambos os tipos de recurso têm a oferecer. Por outro lado, consideramos que, em determinadas situações, esse ensino pode ser realizado apenas com os recursos digitais, por meio da apresentação de objetos digitais de aprendizagem, usando vídeos, hipertextos, jogos digitais etc., ou ainda fazendo o uso do *software GeoGebra* para a construção de fractais. Foi exatamente essa uma das propostas do Enfrac. Os jogos digitais podem ser implementados de forma individual em várias abordagens de ensino, assim como o referido *software*, que se mostrou um recurso digital importante, que possibilita a construção e a reconstrução de fractais com apenas alguns cliques, tudo de forma muito mais ágil do que as formas tradicionais manipuláveis. Isso representa uma miríade de opções para a investigação de diversos conceitos matemáticos.

Acreditamos ainda que o *software GeoGebra* foi a tecnologia que estabeleceu um elo entre os recursos digitais e não digitais durante o Enfrac. Em muitos momentos do curso, os professores utilizaram lápis, papel, compasso e materiais manipuláveis para projetar suas ideias e realizar suas primeiras investigações. Mas, depois de alguns minutos, deixavam esses objetos de lado e focavam na manipulação de fractais com o *GeoGebra*. Dessa forma, indicamos esse *software*, principalmente, para o processo de construção dos fractais clássicos no ensino da Matemática para a Educação Básica. Frisamos que, de fato, se trata de um recurso didático capaz de potencializar a percepção dos estudantes quanto aos outros conteúdos matemáticos ligados aos fractais que não os geométricos.

Mais do que apresentar propostas de ensino para os professores, buscamos durante o curso perceber se as atividades aplicadas poderiam ser abordadas na educação básica. E por meio da observados durante a aplicação e realizações das propostas de ensino que apresentamos no curso, por meio das atividades produzidas por eles, pelos questionários aplicados e pela roda de conversa, percebemos que o ensino da matemática com os fractais pode ser abordado em todos os níveis da Educação Básica. Foram listados vários objetos do conhecimento da Matemática abrangendo todas as unidades temáticas pré-definidas pela BNCC, como geometria, números, álgebra, grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

As propostas de ensino da matemática com fractais aplicadas no Enfrac durante o módulo II são exemplos de práticas que podem ser abordas no Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio, através da construção da pirâmide fractal por cubos, da construção do triângulo de Sierpinski no *GeoGebra* e da realização do Jogo do Caos. Lembramos, porém, que primeiramente se faz necessário a elaboração do planejamento docente para a execução dessas práticas. Estabelecendo um conteúdo específico para ser explorado, adequando o conteúdo que será abordado com as capacidades cognitivas dos alunos, estabelecendo objetivos de aprendizagens e adequando as realidades políticas, físicas e sociais da escola local. Faz-se necessário também, que o professor conheça o(s) fractal(ais) que será(ão) utilizado(s) na abordagem de ensino para não cometer equívocos quanto a característica desse fractal. – Visto que alguns fractais, como os clássicos, possuem características e passos definidos para a sua construção.

O jogo triângulo de Pascal foi a principal proposta de ensino, criada e aplicada por nós no curso, para contemplar o ensino da matemática com fractais no Ensino Fundamental Anos Iniciais. Sendo possível nesse jogo, abordar operações de adição, estimular o cálculo mental, reforçar a tabuada, abordar conceitos de números impares e pares e conhecer um dos fractais clássico, o triângulo de Sierpinski.

Embora tenha sido possível perceber pelos dados produzidos no curso que o ensino da matemática com fractais pode ser abordado nos anos iniciais do ensino fundamental, esperávamos que a partir dos planos de aula e do vídeo produzido pelos cursistas, que eles, surgissem outras abordagens de ensino voltadas para esta modalidade. Mas, principalmente pela carga horária limitada do curso, essas atividades não suscitaram abordagens de ensino como esperávamos. Apesar disso, por meio dos outros instrumentos de análise dos dados percebemos que é possível abordar práticas de ensino da matemática com a geometria fractal nos anos iniciais do ensino fundamental. Contudo, incentivamos que mais pesquisas voltadas para essa modalidade sejam exploradas.

Outra possibilidade de abordagem da matemática com os fractais na Educação Básica é por meio da construção ou desenho dos fractais clássicos. Em vários trabalhos, inclusive nos destacados na fundamental teórica deste, vários autores apresentavam suas pesquisas, por meio da construção de fractais e estudos de conceitos matemáticos presentes nessas estruturas. Percebemos no Enfrac, que construir e investigar conceitos matemáticos como abordagem pedagógica podem revelar diversos conceitos matemáticos presentes nessas estruturas. Desde aqueles pré-estabelecidos pelo professor para a aula, até os diferentes conceitos matemáticos emergidos da investigação dos estudantes. Dessa forma, indicamos a construção de fractais como uma das formas de se abordar a geometria fractal na Educação Básica, e ainda, sugerimos a metodologia de ensino denominada de Investigação Matemática para se realizar esse processo construção e estudo dos fractais.

Por fim, comentando ainda sobre como abordar o ensino da matemática com fractais na Educação Básica, salientamos que o intuito deste trabalho não foi criar estudos prontos ou planos de aulas com passos definidos que pudessem ser totalmente replicados em outras aulas, mas compreender, como realizar o processo de ensino dessa geometria, para os alunos da Educação Básica. Ampliando nossa visão enquanto pesquisadores, sobre como abordar esse ensino, pesquisando metodologias e criando recursos didáticos que pudessem fomentar ou apontar caminhos para a orientação docente desse processo.

Assim, esperamos que este trabalho possa contribuir com outros docentes para o desenvolvimento de suas práticas com a geometria Fractal no Ensino Básico brasileiro, fazer-se popular nos espaços educacionais e fomentar práticas que versem entre o ensino da matemática com fractais e com as tecnologias digitas. Para isso, além das práticas e discussões apresentadas nesta dissertação, disponibilizamos no *site* “É Hora da Matemática”[15], *links* de vídeos, hipertextos, jogos de aprendizagem digital, entre outros recursos digitais, que podem auxiliar os professores atuantes na Educação Básica a desenvolver práticas de ensino da Matemática com os fractais.

[15]Disponível em: https://sites.google.com/view/horadamatemtica/p%C3%A1gina-inicial. Acesso em: 20 out. 2019.

REFERÊNCIAS

ADAMI, P. S. **Fractais no Ensino Médio: uma sequência didática**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: https://bit.ly/36sT5FL. Acesso: 27 out. 2019.

ALMEIDA, M. E. B.; SILVA, M. G. M. Currículo, tecnologia e cultura digital: espaços e tempos de *web* currículo. **Revista E-Curriculum**, São Paulo, v. 7, n. 1, abr. 2011. Disponível em: https://bit.ly/31iTIRp. Acesso: 27 out. 2019.

ALVES, A. D. **Introduzindo a geometria Fractal no Ensino Médio**: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2008. Disponível em: https://bit.ly/2vpCyWh. Acesso: 27 out. 2019.

ARAÚJO, A. T. G. **Noções de geometria Fractal elementar**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2RTQRdl. Acesso: 28 out. 2019.

BACICH, L.; MORAN, J. Aprender e Ensinar com o Foco na Educação Híbrida. **Revista Pátio**, São Paulo, n. 25, p. 45-47, jun. 2015. Disponível em: https://bit.ly/36vYlbF. Acesso em: 20 out. 2019.

BÁGIO, V. A. Da Escrita à Implementação das DCE/PR de Matemática: um retrato feito a cinco vozes e milhares de mãos. *In*: XIII Encontro Nacional de História Oral: História Oral, Práticas Educacionais e Interdisciplinaridade. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016. **Anais** [...]. Disponível em: https://bit.ly/2U4OYx5. Acesso em: 20 out. 2019.

BAIER, T. **O nexo "geometria Fractal – produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo do Ensino Básico**. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: https://bit.ly/2GqDgon. Acesso em: 20 out. 2019.

BAPTISTA, T. R. F. **Fractais – aplicações em Engenharia**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores) – Instituto Superior de Engenharia do Porto, Porto, 2013. Disponível em: https://bit.ly/38HWySs. Acesso em: 20 out. 2019.

BARBOSA, I. A. *et al*. Fluxo de fluídos através de um meio poroso fractal desordenado: análise das tensões de cisalhamento e efeito de escala na estimativa de forças viscosas. **Holos**, vol. 3, 2015, pp. 3-21, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil. Disponível em: https://bit.ly/30YQl1E. Acesso em: 20 out. 2019.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BATISTA, J. L. P. **Uma proposta de ensino de acústica a partir das análises dos timbres de instrumentos musicais do samba**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016. Disponível em: https://bit.ly/2U0EHC7. Acesso em: 20 out. 2019.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Ed., 1994.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática – sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BORGES, J. O. **Cálculo da dimensão fractal do sistema vascular de folhas do cerrado**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Naturais) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://bit.ly/2TYR6qd. Acesso em: 20 out. 2019.

BOZZA, M.; SAUER, L. Z.; MISSELL, V. V. B. G. A Geometria dos Fractais no Ensino de Progressões Geométricas. **Scientia Cum Industria**, vol. 4, n. 4, Rio Grande do Sul, 2016. Disponível em: https://bit.ly/2uEIPNk. Acesso em: 20 out. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: https://bit.ly/394pioJ. Acesso em: 10 maio 2019.

BUENO, L. L. O.; OLIVEIRA, C. M. S.; ANDRADE, C. M. A investigação matemática com o *software GeoGebra* no estudo da geometria Fractal. *In*: IV Congresso de Educação, V Seminário de Estágio e II Encontro do PIBID. **Anais** [...]. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

CAMPOS, F. A. B. Caleidoscópio: um recurso didático manipulável para o ensino da Matemática. *In*: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (Enem), Cuiabá, jul. 2019. **Anais** [...]. Disponível em: https://bit.ly/2Guda3X. Acesso em: 20 out. 2019.

CAMPOS, F. A. B.; FAGUNDES, M. C. Os Fractais que Nos Rodeiam. *In*: I Encontro Mato-Grossense de Professores que Ensinam Matemática – I EMAPEM. **Anais** [...]. Tangará da Serra, Mato Grosso, 2018a. Disponível em: https://bit.ly/37tf54J. Acesso em: 20 out. 2019.

CAMPOS, F. A. B.; FAGUNDES, M. C. Tecnologias Digitais *versus* Lousa (Quadro Negro): Desafios da Prática Docente na Educação Básica. *In*: XIX Semana da Matemática da Unemat (Semat). **Anais** [...], Barra do Bugres, 2018b. Disponível em: https://bit.ly/2U4acv0. Acesso em: 20 out. 2019.

COSTA, V. M. **Objetos de Aprendizagens**: teoria e prática. Porto Alegre: Evangraf, 2014.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa** – métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

CUNHA, J. F. T. ***Blended Learning* e multimodalidade na formação continuada de professores para o ensino de Matemática**. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Unemat, Barra do Bugres, 2018. Disponível em: https://bit.ly/2t1UzJp. Acesso em: 20 out. 2019.

DALPIAZ, M. R. **Um estudo sobre fractais**: origem e proposta didática para aplicação em aula. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: https://bit.ly/2u3iZTt. Acesso em: 20 out. 2019.

DARIO, D. F. **Geometrias Não Euclidianas**: elípticas e hiperbólicas no Ensino Médio. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2RAGewW. Acesso em: 20 out. 2019.

FALCONER, K. J. **Fractal Geometry**: mathematical fundations and applications. New York: John Wiley & Sons, 1990.

FARIA, R. W. S. **Padrões fractais**: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em: https://bit.ly/2S2F78k. Acesso em: 20 out. 2019.

FAVA, R. **Trabalho, educação e inteligência artificial – a era do indivíduo versátil**. Porto Alegre: Penso, 2018.

FEY, F.; ROSA, J. A. **Teoria do Caos**: a ordem na não-linearidade. Taquara: Universo Acadêmico; Faccat, 2012.

GOLDEMBERG, M. **A Arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GOMES, A. E. **Uma proposta de ensino envolvendo geometria Fractal para o estudo de semelhança de figuras planas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010. Disponível em: https://bit.ly/2S26b7R. Acesso em: 20 out. 2019.

GOUVEA, F. R. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e *softwares* de geometria dinâmica**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005. Disponível em: https://bit.ly/2OaDAvT. Acesso em: 20 out. 2019.

HENRIQUE, M. P. **GeoGebra no clique e na palma das mãos: contribuições de uma dinâmica de aula para a construção de conceitos geométricos com alunos do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédia, 2017. Disponível em: http://cursos.ufrrj.br/posgraduacao/ppgeducimat/files/2015/02/Marcos-Paulo-Henrique.pdf. Acesso em: 20 out. 2019.

HESPANHOL, L. L. *et al.* A Utilização do *software GeoGebra* para o ensino da geometria. *In*: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (Enem), São Paulo,v 2016. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, Unicsul, 2016. Disponível em: https://bit.ly/2Guda3X. Acesso em: 20 out. 2019.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012.

LEIVAS, J. C. P. Educação Geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria. **Revista SBEM-RS**, Porto Alegre, n. 13, v.1, p. 9-16, 2012.

LIBÂNEO. J. C. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2007.

LUZ, E. V. **A geometria Fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Ciências Humanas e Ciências Exatas, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/143826/luz_ev_me_sjrp.pdf?sequence=4&isAllowed=y. Acesso em: 20 out. 2019.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: Freeman, 1977.

MARCONDES, N. A. V.; BRISOLA, E. M. A. Análises por triangulação de métodos: um referencial para pesquisa qualitativa. **Revista Univap**, São José dos Campos, v. 20, n. 35, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2RM9aCo. Acesso em: 20 out. 2019.

MARIANI, F. **A concepção educativa e a transformação da educação:** autonomia e emancipação do ser humano. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2010. Disponível em: https://bit.ly/2S3Moou. Acesso em: 20 out. 2019.

MENDES JÚNIOR, D. de C. **Uma nova abordagem dos complexos para o Ensino Médio**: o estudo dos fractais e do caos na composição do conjunto preenchido de Julia e o conjunto de Mandelbrot. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: https://bit.ly/38YiXv0. Acesso em: 20 out. 2019.

MENDONÇA, F. A. C. **Aplicações da geometria Fractal:** uma proposta de didática para o Ensino Médio. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: https://bit.ly/3baw6D8. Acesso em: 20 out. 2019.

MODESTO, C. F. **Matemática e Arte: Explorando a Geometria fractais e as Tesselações de Escher.** Dissertação de Mestrado – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

MORAN, J. Como transformar nossas escolas: novas formas de ensinar a alunos sempre conectados. *In*: CARVALHO, M. (org). **Educação 3.0:** novas perspectivas para o Ensino. Porto Alegre, Unisinos, 2017.

MURARI, C. Experimentando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, 2011.

NEGRI, M. G. **Introdução ao Estudo dos Fractais**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: https://bit.ly/37Nl5FI. Acesso em: 20 out. 2019.

NOTARE, M.; BASSO, M. V. A. Gênese instrumental pessoal e conceitos matemáticos em processo de criação com o *GeoGebra*. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 15, n. 2, Rio Grande do Sul, 2017. Disponível em: https://bit.ly/2RMEmBn. Acesso em: 20 out. 2019.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e aplicações**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2006. Disponível em: https://bit.ly/31d3OmR. Acesso em: 20 out. 2019.

PEREIRA, R. S. G.; PALHARINI, B. N.; DAMIN, W. Investigação Matemática em sala de aula: contribuições do *GeoGebra* para a aprendizagem da função cosseno e seus parâmetros. **Revista Tecnologias na Educação**, ano 8, número/volume 17, dez. 2016. Disponível em: https://bit.ly/2Se4bto. Acesso em: 20 out. 2019.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em: https://bit.ly/36KDD87 Acesso em: 20 out. 2019.

REIS, J. N. C. **Fractais no Ensino Médio**: da observação de padrões da natureza ao uso do *GeoGebra*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2GJW2HG. Acesso em: 20 out. 2019.

SANTOS, L. M.; MIARKA, R.; SIPLE, I. Z. O uso de blogs como tecnologia educacional narrativa para a formação/ação inicial docente. **Bolema**, vol. 28, n. 49, São Paulo, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2te0fA6. Acesso em: 20 out. 2019.

SCHIABEL, D.; FELÍO, H. M. S. (Re)construção do Currículo em Ação: elementos propiciadores e cerceadores da autonomia do professor. **Revista E-Curriculum**, v.16, n. 3, São Paulo, 2018.

SCHMIDT, G. M. **A história da Matemática como recurso didático para o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2RLFnK9. Acesso em: 20 out. 2019.
SCHWINGEL, J. C. da S. **A matemática da samambaia de Barnsley**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: https://bit.ly/2UlqRKV. Acesso em: 20 out. 2019.

SEDREZ, M. R. **Forma fractal no ensino de projetos arquitetônico assistido por computador**. 2009. Dissertação (Mestrado em Arquitetura e Urbanismo) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009. Disponível em: https://bit.ly/2UlqRKV. Acesso em: 20 out. 2019.

SILVA, A. M. **O Vídeo como recurso didático no ensino da Matemática**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2011. Disponível em: https://bit.ly/2GEJl0O. Acesso em: 20 out. 2019.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão – em educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2008.

SOUZA, C. **Geometria Fractal e Aplicações no Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2uOfssj. Acesso em: 20 out. 2019.

SOUZA, G. C.; OLIVEIRA, J. D. S. O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de Matemática. *In*: X Encontro Nacional de Educação Matemática, Matemática – Cultura e Diversidade. **Anais** [...]. Salvador, jul. 2010. Disponível em: https://bit.ly/2Of2kTW. Acesso em: 20 out. 2019.

TITONELI, L. M. B. **Observação de padrões**: modelagem matemática através de sequências numéricas e objetos geométricos. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Centro Técnico Científico, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://bit.ly/3b1xJCY. Acesso em: 20 out. 2019.

TUZZO, S. A.; BRAGA, C. F. O processo de triangulação da pesquisa qualitativa: o metafenômeno como gênese. **Revista Pesquisa Qualitativa**, v. 4, n. 5, São Paulo, 2016. Disponível em: https://bit.ly/36MAULe. Acesso em: 20 out. 2019.

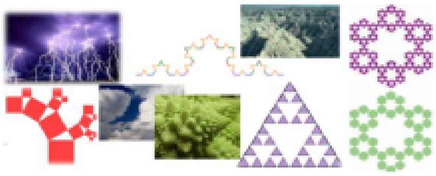
ZANOTTO, R. A. **Estudo da geometria Fractal clássica**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015. Disponível em: https://bit.ly/36MAULe. Acesso em: 20 out. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO I (*ONLINE*)

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais



PPGECM
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática - UNEMAT

Modelo de Questionário *On-line* de Identificação

1) **É morador de qual cidade?**
   Alta Floresta ( ) Barra do Bugres ( ) Denise ( ) Nova Olímpia ( ) Paranaíta ( )

2) **Qual é o seu sexo?** Masculino ( ) Feminino ( )

3) **A quanto tempo atua na Educação Básica?**
   Não atuo ( ) Menos de 1 ano ( ) De 1 à 2 anos ( ) De 2 à 4 anos ( ) De 4 à 6 anos ( )
   De 6 à 10 anos ( ) De 10 à 15 anos ( ) Mais de 15 anos ( )

4) **Atualmente atua com quais turmas/ano da Educação Básica?**
   Não atuo ( ) Ensio Fundamental Anos Iniciais ( ) Ensio Fundamental Anos Finais ( ) Ensino Médio ( ) Outros ( ).

5) **Você conhece os fractais?** Sim ( ) Não ( )

6) **Já trabalhou com os fractais em suas práticas de ensino?** Sim ( ) Não ( )

7) **Se sim, quais conteúdos abordou? Comente.**

8) **Conhece o Software GeoGebra?** Sim ( ) Não ( )

9) **Se sim, já utilizou com seus alunos? Comente.**

10) **Quais tecnologias digitais (ou recursos tecnológicos para o ensino) existe em sua escola?**

11) **Você utiliza esses recursos com seus alunos?**

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO II (INDIVIDUAL)

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais

PPGECM

Questionário 1 Curso ENFRAC

1) **Qual é a sua formação?**

( ) Matemática ( ) Pedagogia

2) **A quanto tempo você atua na educação básica:**

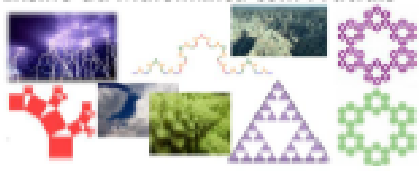
( ) Não atuo ( ) menos de 1 ano ( ) de 1 à 2 anos ( ) de 4 à 6 anos
( ) de 6 à 10 anos ( ) de 10 à 15 anos ( ) mais de 15 anos

3) **Por meio das atividades propostas até o momento, como você avalia o seu conhecimento sobre os fractais? Estudou em sua graduação?**

4) **Durante o curso ENFRAC, você foi apresentado à diversas práticas de ensino com os fractais. Qual prática você mais se identificou, e que talvez, aplicaria com seus alunos? Justifique.**

Curso ENFRAC

Ensino da Matemática com Fractais



5) Como você avalia a construção de fractais no *software* GeoGebra? Auxilia os alunos aprenderem conceitos matemáticos? Quais?

6) No curso ENFRAC foi apresentado práticas utilizando tanto os recursos digitais como os não digitais. Com quais recursos você endente que o ensino desse tópico da matemática, deve ser abordado? Justifique.

7) Você considera que os fractais devem estar presentes no currículo da Educação Básica? Justifique.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO III (EM GRUPO)

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC

Ensino da Matemática com Fractais

PPGECM

Questionário 2 Curso ENFRAC (Grupo)

Modalidade de ensino: ( ) Fundamental Anos Iniciais

( ) Fundamental Anos Finais

( ) Ensino Médio

1) **O grupo considera que o ensino de fractais deve estar presente no currículo escolar da Educação Básica? Justifiquem.**

2) **Quais conteúdos podem ser abordados na Educação Básica com base na modalidade de ensino do grupo? Elenquem o máximo de conteúdos possível.**

APÊNDICE D – JOGO DO CAOS NO *GEOGEBRA*

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais

PPGECM

JOGO DO CAOS NO GEOGEBRA

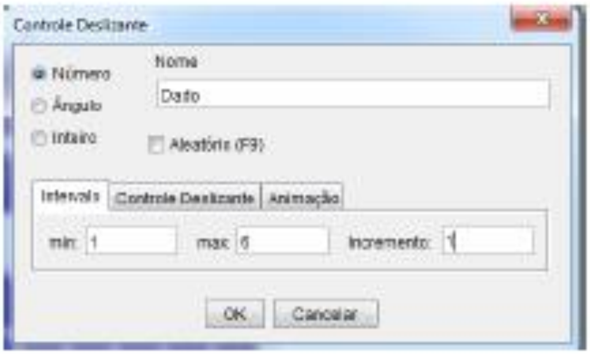
1) Insira um Polígono triangular, através do ícone .

2) Através do ícone vamos inserir dois pontos internos ou externos ao polígono D e E.

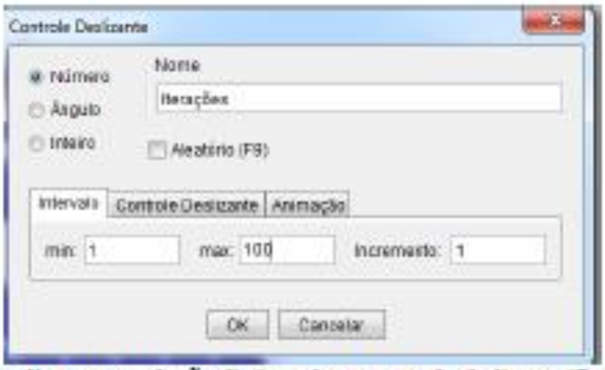
3) Criar uma lista com os Vértices do polígono, para isso vamos inserir no campo de entrada o comando a seguir:

Vértices = {A, B, C, A, B, C}

4) Criar um controle deslizante para representar o Dado, através do ícone . Ver a figura abaixo.



5) Criar um controle deslizante para representar o número de iterações do jogo. Ver figura abaixo.



Após, clique com o botão direito sobre o controle deslizante "Iterações" e selecione "Propriedades". Na janela das Propriedades do controle deslizante, selecione a aba "Programação" e "Ao Atualizar". Digite os seguintes comandos:

DefinirCoordenadas[D,x(E),y(E)]

DefinirValor[Dado, NúmeroAleatório[1,6]]

DefinirCoordenadas[E,x(0.5(E+Elemento[Vértices,Dado])), y(0.5(E+Elemento[Vértices, Dado]))]

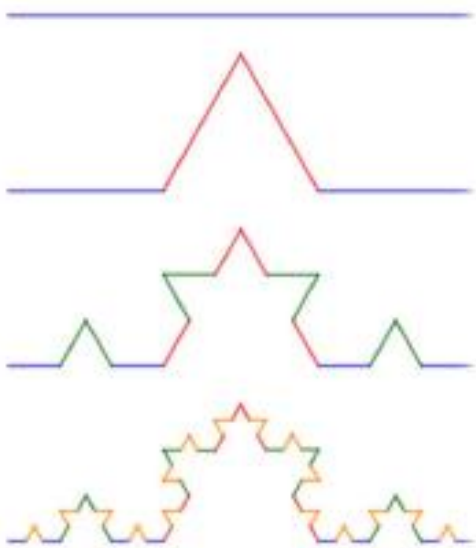
APÊNDICE E – ATIVIDADE DE CONSTRUÇÃO DE UM DOS DEZ FRACTAIS

Curso ENFRAC

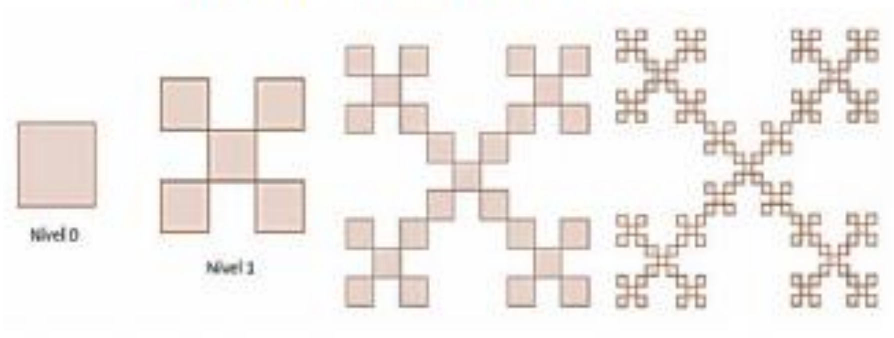
Ensino da Matemática com Fractais

Aqui se encontra 10 Clássicos Fractais, escolha um e construa no *software* GeoGebra, apresentando pelo menos 3 níveis.

Fractal 1: Curva de Koch



Fractal 2: Fractal Quadrangular do Tipo Dürer

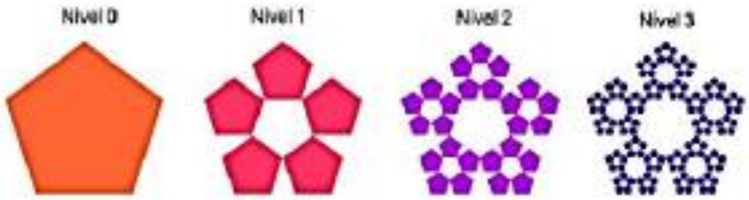


UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais

PPGECM

Fractal 3: Fractal Pentagonal do Tipo Dürer



Fractal 4: Fractal por Circunferência

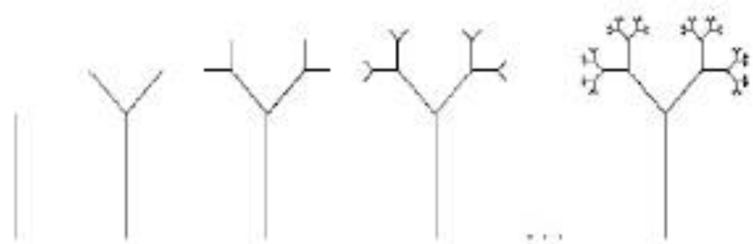
Fractal 5: Árvore Pitagórica

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

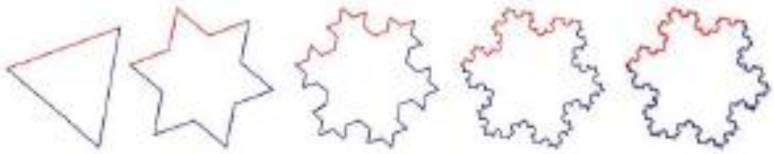
Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais

PPGECM

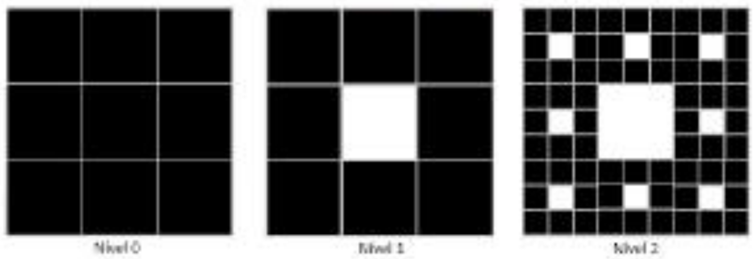
Fractal 6: Árvore Bifurcada



Fractal 7: Ilha de koch



Fractal 8: Tapete de Sierpinski



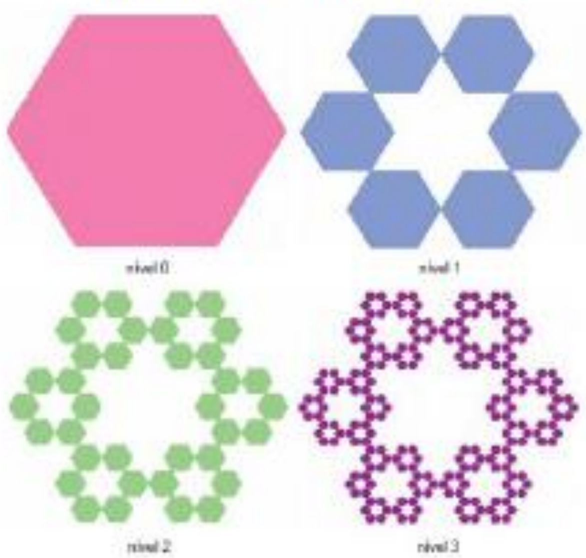
UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais

PPGECM

Fractal 9: Fractal de Cantor

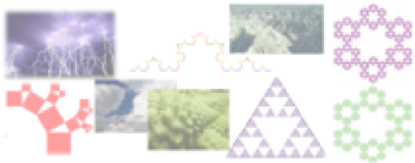
Fractal 10: Fractal Hexagonal do Tipo Dürer



APÊNDICE F – MODELO DE PLANO DE AULA APRESENTADO AOS CURSISTAS DO Enfrac

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais

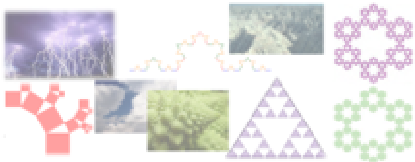


PPGECM

Plano de Aula	
Escola: Acrescente o nome de uma escola (pode ser fictícia)	
Professor(a): Seu Nome ou dos integrantes do grupo	
Turma: Apresente o ano da turma (pode ser fictícia)	
Números de aulas: Acrescente quantas aulas de quantos minutos serão necessárias para a execução da proposta de ensino.	
Recurso(s) Físico(s)	**Recursos Materiais**
• Elenque os recurso físicos que serão necessários, como: • Sala de aula • Laboratório de Informática • Laboratório de Matemática • Biblioteca	• Elenque os materiais que serão necessários, como: • Computador; • Celular • Cola; • Tesoura;
Conteúdo Central	
Apresente o conteúdo central da aula	
Outros Conteúdos	
Apresente outros conteúdos que a prática aborda: • Conteúdo de... • Conteúdo de... • Conteúdo de...	
Objetivo Geral	
Apresente 1 objetivo para a prática. Busque utilizar apenas 1 verbo.	
Objetivos Específicos	
Elenque os outros objetos pedagógicos acossados à prática. • Apenas os outros objetivos essenciais. • Apenas os outros objetivos essenciais. • Apenas os outros objetivos essenciais.	
Metodologia	
Descreva em um parágrafo, como se iniciará a(s) aula(s). Apresente como os recursos físicos serão utilizados. Descreva como os recursos materiais serão utilizados. Apresente como os alunos realização as atividades: individualmente ou coletivamente? E você, o professor, se colocará de que formo no ambiente de ensino?	
Avaliação	
Descreva como o processo de avaliação será realizado. Individualmente? Coletivamente?	

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso

Curso ENFRAC
Ensino da Matemática com Fractais



PPGECM

Em que momento: antes durante ou após a prática?
Será aplicado algum instrumento de avaliação, exemplo: prova, trabalho, construção, exercícios?

Referências

Apresente pelo menos 3 referências. Exemplos:

SILVA, Barbosa. **Pedagogia da terra: Ecopedagogia e educação sustentável.** Ática. São Paulo, 2008. Disponível em: < http://www.inclusaodejovens.org.br/PauloFreire/pedadaterra%20-%20Moacir%20Gadotti.pdf >. Acesso em: 01 ago. 2012.

RABAY, José Bertolucci. **Tendências Ideológicas no Ensino de Fractais.** Porto Alegre: UFRGS, 1983. 214 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1983.

NUNES, Demerval. **A Universidade e o Ensino de Fractais**. Educação Brasileira. Brasília, v. 1, n. 3, p. 35-58, maio/ago. 2009.

Barra do Bugres, 00 de junho de 2019.